

تعیین حریم کمی چاه‌ها به کمک مدل عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین در آبخوان محصور و آزاد در شرایط غیر ماندگار (مطالعه موردی: دشت بیرجند)

علی محتشمی^۱، سید آرمان هاشمی منفرد^{۲*}، غلامرضا عزیزیان^۲، ابوالفضل اکبرپور^۳

۱. دانشجوی دکتری مهندسی عمران، گرایش مهندسی و مدیریت منابع آب، دانشگاه سیستان و بلوچستان

۲. دانشیار دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان

۳. دانشیار دانشکده فنی و مهندسی، گروه عمران، دانشگاه بیرجند

(تاریخ دریافت ۱۳۹۷/۰۶/۳۱؛ تاریخ تصویب ۱۳۹۷/۱۱/۱۰)

چکیده

در مطالعه حاضر برای نخستین بار حریم کمی با استفاده از یک روش عددی در دو آبخوان محصور و آزاد تعیین و ترسیم شد. روش عددی به کار گرفته شده، روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین است که تا کنون در این حوزه و با این کاربرد استفاده نشده است. آبخوان محصور، هندسه منظمی دارد و شامل چهار چاه بهره‌برداری می‌شود. پس از مدل‌سازی سطح آب به کمک روش بدون شبکه، حریم کمی چاه‌ها در دوره‌های یک‌ماهه، یک‌ساله، دو‌ساله و پنج‌ساله ترسیم شدند و سپس تأثیر ضرایب هدایت هیدرولیکی و ذخیره در چگونگی گسترش شکل این ناحیه بررسی و ارزیابی شد. نتایج نشان دادند با گذشت زمان، حریم کمی چاه‌ها گسترده‌تر می‌شود که ناشی از برداشت بیشتر و در پی آن، افت افزون‌تر سطح آب است. به طوری که برای حالتی که فقط چاه نخست در حالت بهره‌برداری باشد، عرض حریم در سال دوم ۲/۸۲ متر است و این مقدار در سال پنجم به ۵/۸ متر می‌رسد. همچنین، با افزایش ضریب هدایت هیدرولیکی و ضریب ذخیره مساحت و عرض حریم کم می‌شود، به بیانی دیگر، تعداد نقاطی که داخل حریم می‌افتند، کاهش می‌یابد. در مثال دیگری حریم چاه برای یک آبخوان واقعی ترسیم شد. آبخوان دشت بیرجند واقع در استان خراسان جنوبی که از نوع آزاد است، ارزیابی شد. سطح آب مدل‌سازی شد و نتایج با داده‌های مشاهداتی مقایسه شدند، به طوری که خطای جذر میانگین مربعات برای این روش در حالت ماندگار و غیرماندگار به ترتیب ۰/۴۸۳ و ۰/۷۵۷ متر به دست آمد. این آبخوان ۱۹۰ حلقه چاه دارد که از این میان، دو چاه به عنوان نمونه انتخاب شدند. در نهایت، حریم کمی برای دو چاه انتخاب شده ترسیم شدند. نتایج نشان دادند گسترش و توسعه این ناحیه در حالت واقعی هم بیشتر تحت تأثیر ضریب هدایت هیدرولیکی است.

کلیدواژگان: آبخوان واقعی، حالت ناپایدار، حریم چاه، روش بدون مش.

مقدمه

رشد روزافزون جمعیت و افزایش نیاز انسان‌ها به آب در بخش‌های کشاورزی، صنعت و شرب، این منابع را با خطری جدی تهدید می‌کند. مدیریت اشتباه از یک سو، کمبود بارندگی و تغییر اقلیم از سوی دیگر، نگرانی‌ها را بابت آینده این منابع بیش از پیش افزایش داده است. در گذشته، انسان‌ها نیاز آبی خود را از طریق چشمه‌ها، رودخانه‌ها و قنوت تأمین می‌کردند، اما شرایط کنونی آنها را به سمت حفر چاه سوق داده است. حفر چاه‌های متوالی در کنار چاه‌های قدیمی موجب افزایش نگرانی در صاحبان چاه‌ها می‌شود؛ زیرا آنها از به‌همه قرارگرفتن حریم چاه‌هایشان به وسیله افراد دیگر احساس خطر می‌کنند.

بنابراین، تعیین حریم چاه بسیار مهم است و می‌تواند کلیدی برای برنامه‌ریزی‌های آینده باشد. به‌محدوده‌ای از چاه که برداشت آب از آن موجب کاهش میزان آب‌های زیرزمینی در آبخوان آن منطقه می‌شود، حریم کمی چاه گفته می‌شود. با توجه به حساسیت موضوع، باید در تعیین حریم کمی چاه‌ها دقت بیشتری شود تا از آسیب‌های افزون‌تر به آبخوان‌ها جلوگیری کند. حریم کمی به شرایط هیدرولوژی منطقه وابسته است. تغذیه آب زیرزمینی و تداخل آن با رودخانه‌ها، شاخه‌های هیدروژئولوژیکی بستر زمین، تخلخل و هدایت هیدرولیکی در مجاورت چاه بهره‌برداری، از جمله این عواملند. به بیانی دیگر، برای ترسیم حریم باید تغییرات مکانی و زمانی پارامترهای یادشده در نظر گرفته شود [۱].

مطالعاتی که در آن حریم کمی چاه را ترسیم کند به‌ندرت صورت گرفت است، اما تعداد زیادی از پژوهش‌ها برای ترسیم حریم کیفی و یا ناحیه حفاظتی چاه (WHPA) انجام شده است. بیر و ژاکوب در سال ۱۹۶۵، راه حل تحلیلی برای یافتن مرز حریم کیفی چاه در آبخوان‌های همگن، همسان و نامحدود که تحت تأثیر جریان یکنواخت بودند را ارائه کردند [۲]. جواندل و تی سانگ (۱۹۸۶) مدل تحلیلی‌ای برای محاسبه و ترسیم حریم کمی چاه در صورتی که تعداد زیادی چاه هم‌زمان در حال بهره‌برداری باشند را معرفی کردند [۳]. لرنر در سال ۱۹۹۲، مدل نیمه‌تحلیلی برای محاسبه تغذیه و

مساحت ناحیه حفاظتی چاه ارائه داد. لرنر نشان داد اندازه و شکل ناحیه حفاظتی چاه زمانی که تغذیه نادیده گرفته شود، به طور درخور توجهی تغییر می‌کند [۴]. اشپرینگر و بیر (۱۹۹۲) مدل‌های جریان تحلیلی (براساس معادله هانتوش-ژاکوب-تایس)، نیمه‌تحلیلی (براساس معادله تیم) و عددی (براساس روش تفاضل محدود) را در ترسیم حریم کمی برای یک چاه در یک آبخوان مقایسه کردند [۵]. آنها به این نتیجه رسیدند که مدل عددی نتایجی با بیشترین دقت را در مقایسه با سایر روش‌های مطالعه‌شده ارائه می‌دهد و دلیل آن مطابقت بهتر نتایج آن با جریان واقعی است. کینزلباک و همکارانش (۱۹۹۲) ناحیه حفاظتی چاه به کمک روش‌های تحلیلی و عددی را در حالت دوبعدی و سه‌بعدی بررسی و ارزیابی کردند. آنها همچنین تأثیر پارامتر تغذیه بر ناحیه حفاظتی چاه را بررسی کردند. آنها در پژوهش یادشده نتیجه گرفتند که تعیین ناحیه حفاظتی چاه به کمک یک روش عددی، امری حیاتی و ضروری برای یک آبخوان است [۶]. گراب در سال ۱۹۹۳ نوعی مدل تحلیلی برای ترسیم ناحیه حفاظتی چاه در آبخوان‌های آزاد و محصور و یا ترکیبی از این دو معرفی کرد. مدل ارائه‌شده برای شرایط ماندگار است و بسیاری از پارامترهای هیدرودینامیکی را در نظر نمی‌گیرد. درخور یادآوری است که گراب مدل خود را فقط روی یک چاه آزمایش کرد [۷]. یائو و لی (۲۰۰۳) راه حل تحلیلی دیگری در حالت ماندگار برای رسم ناحیه حفاظتی چاه به‌منظور کاهش آثار آلودگی ارائه کردند. معادله‌ای که آنها در مقاله خود معرفی کردند به‌خلاف معادلات مقالات قبلی، مستقل از تعداد چاه‌ها و نوع آنهاست [۸]. فین و همکارانش در سال ۲۰۰۵ نوعی الگوریتم به‌منظور ترسیم سریع ناحیه حفاظتی معرفی کردند که بر پایه مدل تحلیلی بود. آبخوان مورد استفاده آنها دوبعدی همگن بود که سه چاه بهره‌برداری داشت و حریم کیفی را برای چاه‌ها به کمک الگوریتم جدیدشان ترسیم کرده بودند [۹]. اینترپارسونگ و ژان در سال ۲۰۰۷ حریم کیفی چاه را که بین دو جریان موازی قرار گرفته بود، به کمک یک رابطه نیمه‌تحلیلی رسم کردند. همچنین، آنها تأثیر بستر جریان و مقدار ضریب نفوذپذیری را روی توسعه این ناحیه بررسی و ارزیابی کردند [۱۰]. در سال ۲۰۱۱ اسدی آقبولاغی و همکارانش ناحیه حفاظتی چاه را برای یک آبخوان نزدیک

ساده محاسبه کردند؛ یک آبخوان همگن با یک چاه، یک آبخوان ناهمگن با یک چاه، دو آبخوان دیگر با چهار چاه یکی در جهت جریان و دیگری در خلاف جهت جریان، چهار مثال ساده‌ای بودند که از آن به‌منظور اعتبارسنجی کارشان استفاده کردند [۱۶].

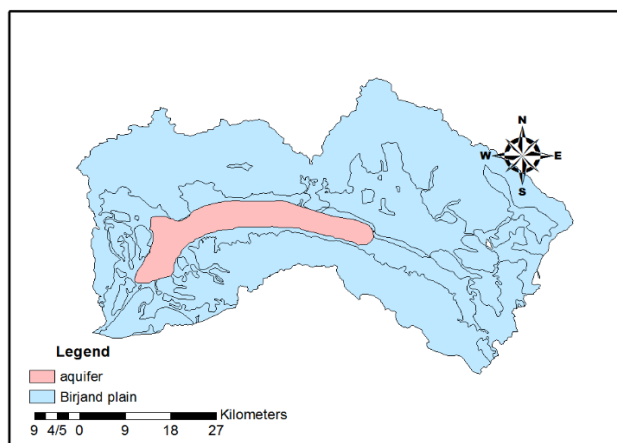
از مطالعات انجام‌شده حساسیت و ضرورت استفاده از نوعی مدل عددی قدرتمند و دقیق که بتواند منعطف با همه شرایط آبخوان، حریم چاه را محاسبه کند، بیش از گذشته احساس می‌شود. در مطالعه حاضر برای نخستین بار از روش عددی قدرتمند بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین به‌منظور محاسبه حریم کمی چاه استفاده شده است. تا کنون از روش عددی‌ای که صرفاً حریم کمی چاه را ترسیم کند، استفاده نشده است. روش عددی بدون شبکه به کار گرفته‌شده در بسیاری از مسائل، مربوط به دینامیک سیالات محاسباتی استفاده می‌شود [۱۷-۱۹] و تا کنون با این کاربرد استفاده نشده است. تابع وزن و تابع شکل استفاده‌شده در این روش به ترتیب تابع اسپلاین درجه ۳ و تابع حداقل مربعات متحرک است. دو مثال یکی در آبخوان محصور با هندسه ساده و دیگری در آبخوان واقعی ارائه شده است. پس از مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی، حریم کمی چاه‌ها در آبخوان محصور برای دوره‌های یک‌ماهه، یک‌ساله، دوساله و پنج‌ساله رسم می‌شود. سپس، این ناحیه در آبخوان واقعی برای دو چاه نمونه ترسیم خواهد شد و در مورد چگونگی گسترش و توسعه آن بحث می‌شود.

مواد و روش‌ها

منطقه مطالعه‌شده

محدوده مطالعاتی آبخوان، در قسمت شمالی با مختصات تقریبی ۳۲ و ۳۴ تا ۳۳ و ۸ عرض شمالی، ۵۸ و ۴۱ تا ۵۹ و ۴۴ شرقی قرار گرفته است. آبخوان آزاد دشت بیرجند با مساحت ۲۶۵ کیلومتر مربع و متوسط ضخامت اشباع ۳۰ متر، در استان خراسان جنوبی واقع شده است (شکل ۱). وسعت کل حوضه آبریز دشت بیرجند حدود ۳۴۰۸ کیلومتر مربع است. دشت بیرجند طبق طبقه‌بندی اقلیمی دومارتن جزء مناطق خشک محسوب می‌شود [۲۰].

جریان در شرایط ماندگار ترسیم کردند. همچنین، آنها مباحث خود را روی دو دبی بحرانی مطرح کردند، ترسیم ناحیه حفاظتی توسط روش‌های پیچیده جبری و تئوری تصاویر صورت گرفته بود [۱۱]. در سال ۲۰۱۲ سامانی و زارعی دودج حریم کیفی سیستم چندچاهی را برای یک آبخوان گوه‌مانند محصور و آزاد، با در نظر گرفتن و بدون آن در جریان یکنواخت ارائه دادند. نوع چاه، میزان برداشت و یا تزریق، در راه حلی که آنها ارائه کردند، به‌صورت اختیاری بود و می‌شد با اضافه و کم کردن هر یک از پارامترها، حریم کیفی را ترسیم کرد. معادله‌ای که آنها برای این نوع آبخوان‌ها ارائه کرده بودند برای همه شرایط مرزی قابل تعمیم است و مشکلات معادلات قبلی را ندارد [۱۲]. همچنین، آنها در سال ۲۰۱۴ نوعی راه حل تحلیلی برای یک سیستم چندچاه در آبخوان محصور و آزاد جزیره‌ای شکل ارائه دادند و کاربرد مهندسی راه حل یادشده را بحث و تفسیر کردند [۱۳]. آنها در مطالعه‌ای دیگر در سال ۲۰۱۶، راه حلی ارائه دادند که به کمک آن می‌توانستند ناحیه حفاظتی چاه را برای هر نوع شرایطی که آبخوان با هندسه مستطیل دارد، محاسبه کند و آن را به‌صورت گرافیکی نمایش دهد. فرمولی که آنها ارائه کردند با افزایش تعداد چاه‌ها، تغییر مکان آنها، تغییر شرایط مرزی و حتی تغییر نوع چاه (از بهره‌برداری به تزریق و به عکس) منعطف عمل می‌کرد [۱۴]. استابولتیزیدیس و دوکو (۲۰۱۷) حریم کیفی چاه‌ها را در یک آبخوان واقعی در چین ترسیم کردند. آنها در پژوهش یادشده از نرم‌افزار WHaEM^۱ بهره بردند. این نرم‌افزار از روش تحلیلی و شعاع ثابت، حریم کمی و کیفی چاه را محاسبه می‌کند. آنها با استفاده از نتایج به‌دست‌آمده از مدل، موفق به برنامه‌ریزی و سیاست‌گذاری برای کاهش ورود آلودگی به آبخوان شدند [۱۵]. در سال ۲۰۱۷ فئو و همکارانش کدی را که بر پایه برنامه‌نویسی پایتون بود، به نرم‌افزار GMS افزودند و به کمک آن ناحیه حفاظتی چاه را برای یک آبخوان دوبعدی در شرایط ماندگار محاسبه کردند. کد مد نظر در صورت تغییر تعداد چاه‌ها، منعطف عمل می‌کند و مستقل از تعداد چاه است. همچنین، آنها برای بحث صحت‌سنجی کارشان، ناحیه حفاظتی را برای چهار مثال



شکل ۱. موقعیت جغرافیایی آبخوان و دشت بیرجند [۲۰]

می‌تواند فقط از نوع هد ثابت (دیریشلت)، جریان ثابت (نیومن) و یا ترکیبی از این دو باشد [۲۸]. در معادله یادشده، H سطح آب زیرزمینی وابسته به x و y است؛ k ضریب هدایت هیدرولیکی، k_x در جهت افقی و k_y در جهت عمودی؛ S ضریب ذخیره، Q دبی متمرکز (با علامت منفی در صورت چاه بهره‌برداری و با علامت مثبت در صورت چاه تزریق) و q دبی گسترده مانند باران یا تبخیر است [۲۰].

در معادلات W و \emptyset به ترتیب تابع وزن و تابع شکل هستند.

پس از گسسته‌سازی کامل معادلات حاکم بر جریان آب زیرزمینی به یک دسته معین، معادله خطی به شکل $KU = F$ رسیده که فرم گسسته‌شده هر پارامتر در روابط ۲ تا ۴ نشان داده شده است:

$$[K] = k \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \emptyset}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \emptyset}{\partial y} d\Omega \right] \quad (2)$$

$$- \iint_{\Omega} W_i S_y \left(\frac{1}{\Delta t} \right) d\Omega$$

$$[U] = H^{n+1} \quad (3)$$

$$[F] = \iint_{\Omega} W_i S_y \left(\frac{H^n}{\Delta t} \right) d\Omega + Q \times \delta(x - x_w)(y - y_w) \quad (4)$$

K ماتریس سختی، F ماتریس بار و U ماتریس مجهول (سطح آب زیرزمینی در دوره بعدی) است. همچنین، برای اطلاعات بیشتر می‌توان به پژوهش‌های محتشمی و همکارانش (۲۰۱۷) و (۱۳۹۶) مراجعه شود [۲۰ و ۲۴].

روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین (MLPG)

اخیراً، پژوهش‌های بسیاری در زمینه گسترش روش‌های بدون شبکه در مکانیک سیالات صورت گرفته و می‌گیرد، روش‌های بدون شبکه، سختی و مشکلات مربوط به مش‌بندی‌های پی‌درپی را فقط با اضافه و حذف کردن نقاطی با موقعیت مناسب، از بین می‌برد [۲۱ و ۲۲]. همچنین، بسیاری از محدودیت‌هایی که روش اجزای محدود در حل مسائل دارد را ندارد [۲۳].

در مطالعه حاضر روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین که بر پایه تابع تقریب حداقل مربعات متحرک است، در نرم‌افزار MatLab 2014a برای مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی و یافتن حریم کمی چاه توسعه یافته است. تابع شکل حداقل مربعات متحرک که به عنوان تابع درون‌یاب استفاده می‌شود، براساس مطالعات دیگر نویسندگان این مقاله محاسبه شده است و برای آشنایی با چگونگی محاسبه آن می‌توان به منابع [۲۰ و ۲۴] مراجعه کرد.

معادله حاکم بر آب زیرزمینی در آبخوان محصور

معادله حاکم بر آب زیرزمینی در حالت دوبعدی برای یک آبخوان محصور در حالت غیرماندگار به صورت رابطه ۱ است [۲۵-۲۷].

$$k_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) = \quad (1)$$

$$S \frac{\partial H}{\partial t} + Q \times \delta(x - x_w)(y - y_w) + q$$

که در آن شرایط اولیه از حالت ماندگار به دست می‌آید و در رابطه قرار می‌گیرد [۲۰]. شرایط مرزی برای معادله ۱

اعمال شده و ماتریس‌های K و F اصلاح می‌شوند. در نهایت، در مرحله ششم این دستگاه معادلات حل شده و سطح آب برای همه نقاط محاسبه می‌شود. نکته مهم در مرحله ششم، استفاده از روش حذفی گوس در حل دستگاه معادله خطی است. از آنجا که هدف تعیین ناحیه حریم کمی است، افت سطح آب در نقاط اطراف چاه محاسبه شده و آن دسته از نقاطی که افتشان از یک مقدار مشخص بیشتر است، ناحیه حریم را تعیین می‌کنند. سپس، شرط تعداد گام زمانی بررسی می‌شود، در صورتی که تعداد دوره‌های زمانی به اتمام نرسیده بودند، این الگوریتم دوباره تکرار می‌شود. از آنجا که استفاده از این روش برای محاسبه سطح آب قبلاً توسط نویسندگان مقاله حاضر صحت‌سنجی و بررسی شده است، نیازی به بررسی دوباره این کار نیست. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به پژوهش‌های محتشمی و همکارانش (۲۰۱۷) [۲۰] و (۱۳۹۶) [۲۴] مراجعه کرد.

آبخوان دشت بیرجند با استفاده از نرم‌افزار MatLab مدل‌سازی شد. سپس، نقاط گرهی در آن به صورت یکنواخت با فاصله ۵۰۰ متری از نقاط بالا و پایین، چپ و راست، پخش شدند ($\Delta x = \Delta y = 500m$). این فاصله براساس مطالعاتی که پژوهشگران قبلی روی آبخوان انجام داده بودند، در نظر گرفته شده است؛ زیرا انتخاب این فاصله مقایسه نتایج را امکان‌پذیر می‌کند. مدل‌سازی برای یک سال (۱۳۹۰-۱۳۹۱) با گام زمانی ماهانه است. اطلاعات ورودی به کد روش بدون شبکه شامل شرایط مرزی آبخوان، میزان دبی چاه‌های برداشت، مقادیر تغذیه یا بارندگی، مقادیر آبدهی ویژه و ضریب هدایت هیدرولیکی هستند که در ذیل به شرح آن‌ها پرداخته می‌شود.

چاه‌های بهره‌برداری

یکی از عوامل اصلی تخلیه در آب‌های زیرزمینی، چاه‌های برداشت‌اند. در منطقه مطالعه‌شده ۱۹۰ حلقه چاه بهره‌برداری وجود دارد که موقعیت هر یک از چاه‌ها با نماد دایره قرمز در شکل ۳ مشخص شده است. در روش بدون شبکه، موقعیت چاه‌ها به نزدیک‌ترین نقطه گرهی تغییر مکان می‌دهد.

معادله حاکم بر آب زیرزمینی در آبخوان آزاد زمانی که آبخوان آزاد باشد، براساس فرض دوپوئی و معادلات پیوستگی [۲۰]، معادله حاکم رابطه ۵ خواهد بود.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y H \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{S_y \partial H}{\partial t} + R. \quad (5)$$

که در آن S_y آبدهی ویژه است.

در نهایت، پس از گسسته‌سازی به روش باقی‌مانده وزنی به همان دستگاه معادلات خطی $KU = F$ رسیده که هر یک از پارامترها در روابط ۶-۸ تعریف می‌شوند:

$$[K] = -\tau k \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} H^n \frac{\partial \emptyset}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} H^n \frac{\partial \emptyset}{\partial y} d\Omega \right] - \tau \iint_{\Omega} W_i S_y \left(\frac{1}{\Delta t} \right) d\Omega. \quad (6)$$

$$[U] = H^{n+1}. \quad (7)$$

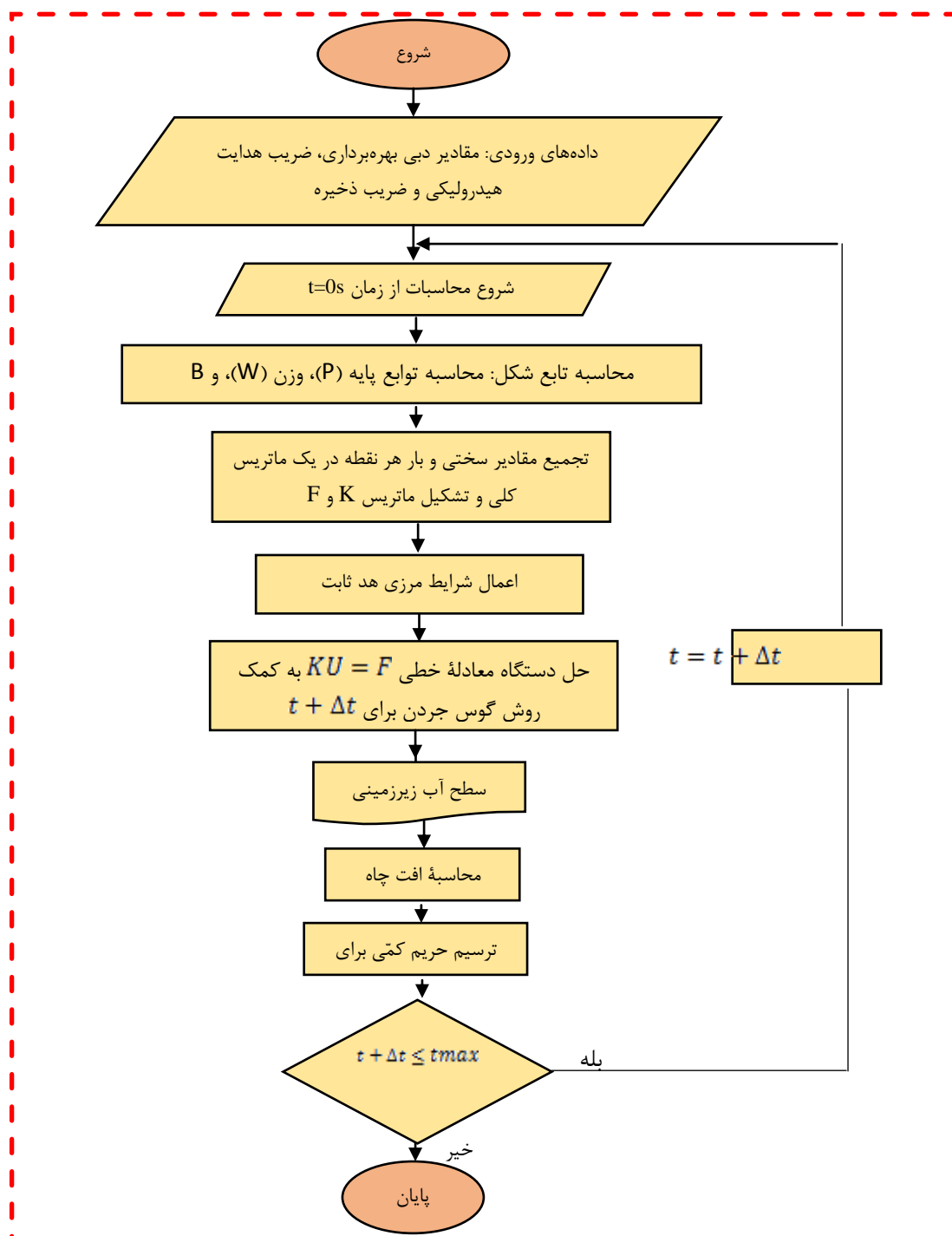
$$[F] = -\tau \iint_{\Omega} W_i S_y \left(\frac{H^n}{\Delta t} \right) d\Omega + \tau \iint_{\Omega} W_i R d\Omega. \quad (8)$$

تابع وزن استفاده‌شده اسپلاین درجه ۳ است که از رابطه ۹ محاسبه می‌شود:

$$W_i(X) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \bar{r}_i + \frac{4}{3} \bar{r}_i^2 \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \bar{r}_i + \frac{4}{3} \bar{r}_i^2 - \frac{4}{3} \bar{r}_i^3 \leq 0.5 < \bar{r}_i \leq 1 \\ \bar{r}_i > 1 \end{array} \right. \quad (9)$$

شکل ۲ مراحل مدل‌سازی و تعیین حریم کمی به کمک روش بدون شبکه در تعداد گام‌های زمانی مشخص را نشان می‌دهد.

در مرحله دوم اطلاعات ورودی به کد وارد می‌شود. این اطلاعات شامل مختصات نقاط گرهی، مختصات چاه‌ها و دبی برداشتشان، اطلاعات هدایت هیدرولیکی، ضریب ذخیره و مقادیر آبدهی ویژه می‌شود. مرحله سوم شروع محاسبات از زمان صفر است. در روش بدون شبکه معادلات حاکم روی هر نقطه اعمال می‌شود، همچنین محاسبه تابع شکل و وزن برای هر نقطه گرهی صورت می‌گیرد. بنابراین، هر نقطه یک معادله دارد و مرحله چهارم جمع همه این معادلات در دو ماتریس K و F است. شرایط مرزی درج‌شده و یا هد ثابت در مرحله پنجم



شکل ۲. مراحل ترسیم حریم کمتی به کمک روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین

چاه‌های مشاهده‌ای

در این آبخوان ۱۰ چاه مشاهده‌ای (پیزومتر) وجود دارد که سطح آب به‌صورت ماهیانه در آنها کنترل می‌شود. به کمک این چاه‌ها می‌توان سطح آب مشاهده‌شده را برای مقایسه با سطح آب مدل‌سازی‌شده استفاده کرد. در شکل

۳ مکان این چاه‌ها با دایره آبی مشخص شده است. نکته مثبت، مکان مناسب این چاه‌هاست، به‌طوری که در کل دشت پخش شده‌اند و می‌توان به‌راحتی سطح آب را در کل دشت ارزیابی کرد.

شرایط مرزی

شرایط مرزی در بخش آب زیرزمینی به سه دسته تقسیم می‌شوند: ۱. هد ثابت، ۲. جریان ثابت و ۳. هد وابسته به جریان. در آبخوان دشت بیرجند، ۱۰ محدوده وجود دارد که شرایط مرزی هد ثابت دارند، ۹ بخش هد ثابت ورودی و یک بخش که با فلش قرمز متمایز شده است، هد ثابت خروجی است (شکل ۳). بقیه مناطق شرایط مرزی جریان صفر را دارند (NO FLOW). در شرایط مرزی هد ثابت، سطح آب برای مرز تعیین می‌شود و مقدار آن در امتداد مرز طی همه دوره‌ها ثابت می‌ماند. این مرزها از امتداد خطوط هم‌سطح آب زیرزمینی تا مرز به دست می‌آیند.

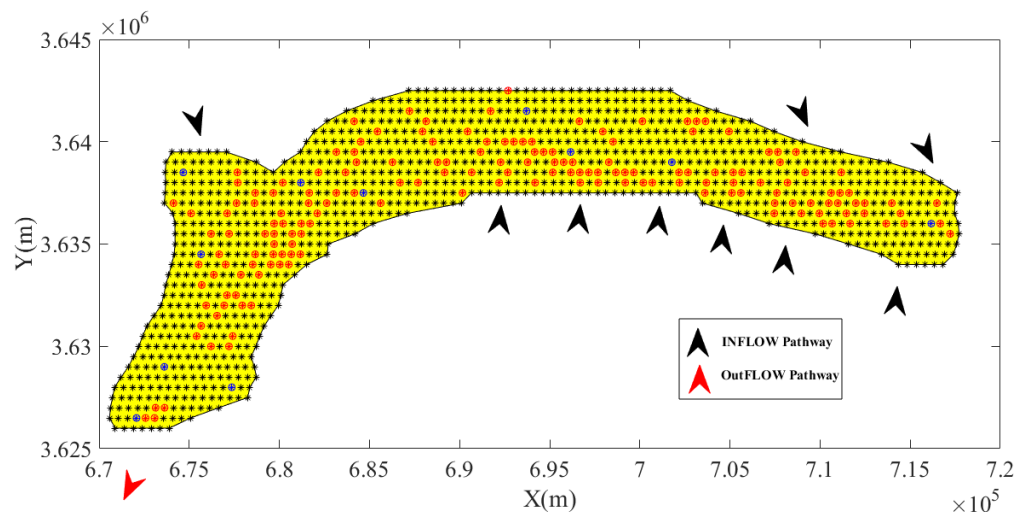
مقادیر تغذیه

با توجه به شرایط اقلیمی منطقه که طبق ضریب دومارتن

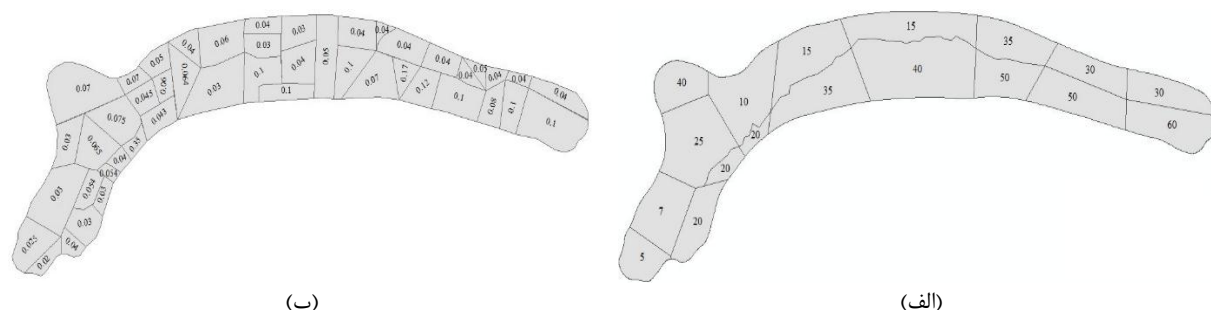
در اقلیم خشک قرار گرفته است [۲۰]، اندک بارش به عنوان پارامتر تغذیه در آبخوان در نظر گرفته می‌شود. این مقدار با توجه به اطلاعات اداره آب منطقه‌ای برابر ۱۵ درصد متوسط بارش سالیانه در منطقه است که در کد برابر ۰/۰۰۰۰۷۲۷ متر بر روز در نظر گرفته شده است.

ضریب هدایت هیدرولیکی و ضریب ذخیره

مقادیر ضرایب هدایت هیدرولیکی و آبدهی ویژه که به کد معرفی و وارد می‌شوند، در شکل ۴ ارائه شده است. بیشترین مقدار ضریب هدایت هیدرولیکی در آبخوان ۶۰ متر بر روز است که در شرقی‌ترین قسمت آبخوان قرار گرفته و در مقابل کمترین مقدار این ضریب در جنوب غربی و با مقدار ۲ است. همچنین، بیشترین مقدار آبدهی ویژه ۰/۱ است که در قسمت شرق آبخوان است.



شکل ۳. نمایش آبخوان بیرجند، چاه‌های مشاهده‌ای، چاه‌های بهره‌برداری و جبهه‌های ورودی و خروجی



شکل ۴. الف) مقادیر ضریب هدایت هیدرولیکی؛ ب) مقادیر ضریب آبدهی ویژه

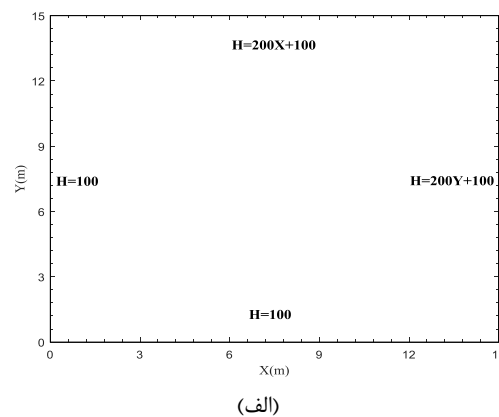
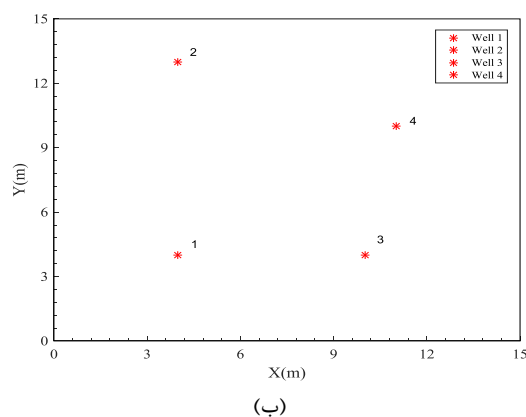
همگی از نوع هد ثابت‌اند. ضلع غربی و جنوبی آبخوان هد صفر را دارد و ضلع شرقی و شمالی با توجه به رابطه داده‌شده به دست می‌آیند. در شکل ۵-ب موقعیت چاه‌ها با نماد ستاره قرمز نشان داده شده‌اند.

پس از ساخت هندسه آبخوان در محیط MatLab، گره‌ها به‌طور یکنواخت در فواصل یک‌متری از یکدیگر پخش می‌شوند. در مورد صحت نتایج این روش، یادآوری این نکته ضروری است که از آن در تحقیقات قبلی نویسندگان پژوهش حاضر [۲۰ و ۲۴] برای مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در حالت ماندگار و غیرماندگار و هم در آبخوان محصور و آبخوان آزاد استفاده شده و نتایج بسیار دقیق و نزدیک به داده‌های مشاهده‌ای ارائه داده بود.

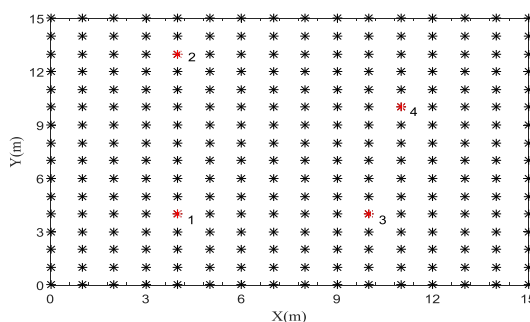
مثال عددی ترسیم حریم کمی در آبخوان محصور آبخوان فرضی دوبعدی با اضلاع 15×15 متر موجود است. این آبخوان از نوع محصور بوده و شرایط مرزی آن تنها هد ثابت است. این منطقه همگن و همسان است، به طوری که ضریب هدایت هیدرولیکی و ضریب ذخیره به‌ترتیب ۱۰ متر بر روز و $0/2$ است. چهار چاه بهره‌برداری با مختصات مشخص در آبخوان وجود دارند که دبی پمپاژ آنها طی زمان تغییر نمی‌کند و مقدار ثابتی دارد. جدول ۱ مشخصات چاه‌ها و میزان برداشت از آنها را نشان می‌دهد. شکل ۵ از دو بخش تشکیل شده است. قسمت الف هندسه آبخوان را نشان می‌دهد. همچنین، شرایط مرزی پیرامون اضلاع آبخوان در شکل ۵-الف مشخص شده‌اند که

جدول ۱. مشخصات چاه‌های منطقه

شماره چاه	مختصات در جهت افقی (متر) X	مختصات در جهت قائم (متر) Y	میزان برداشت (متر بر روز) Q
۱	۴	۴	۰/۵
۲	۴	۱۳	۰/۵
۳	۱۰	۴	۰/۵
۴	۱۱	۱۰	۰/۵



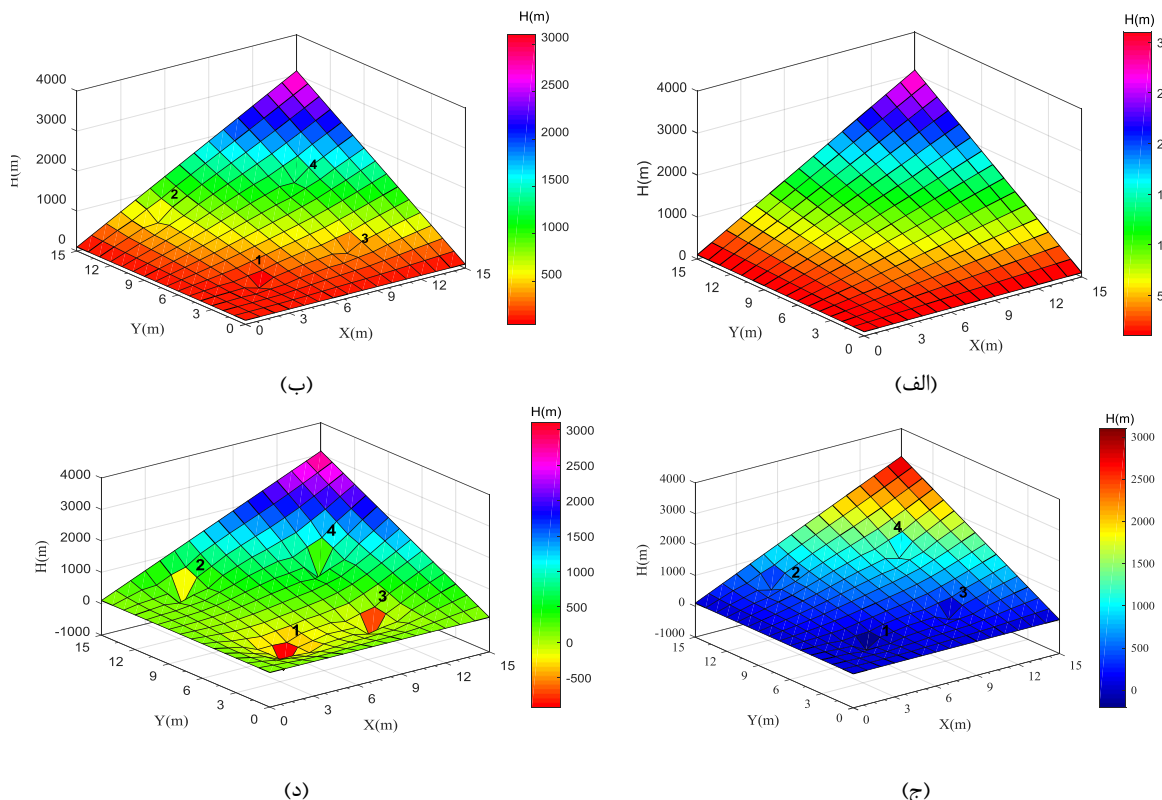
شکل ۵. آبخوان منطقه مطالعه‌شده



شکل ۶. پخش گره‌های محاسباتی روی مرز و دامنه مسئله

است، به طوری که این مقدار در چاه‌های یک، دو، سه و چهار به ترتیب ۲۹۱/۱۵، ۶۰۹/۸۵، ۳۶۰/۱۰ و ۱۵۴۳/۷ متر می‌شود. قسمت ج پس از گذشت دو سال است و همان طور که در شکل دیده می‌شود، میزان افت افزایش یافته، به طوری که چاه ۱ به طور کامل خشک شده است. در دوره پنج‌ساله سطح آب چاه‌ها بسیار پایین آمده و چاه‌های ۱، ۲ و ۳ خشک شده‌اند و فقط چاه ۴ پمپاژ می‌کند.

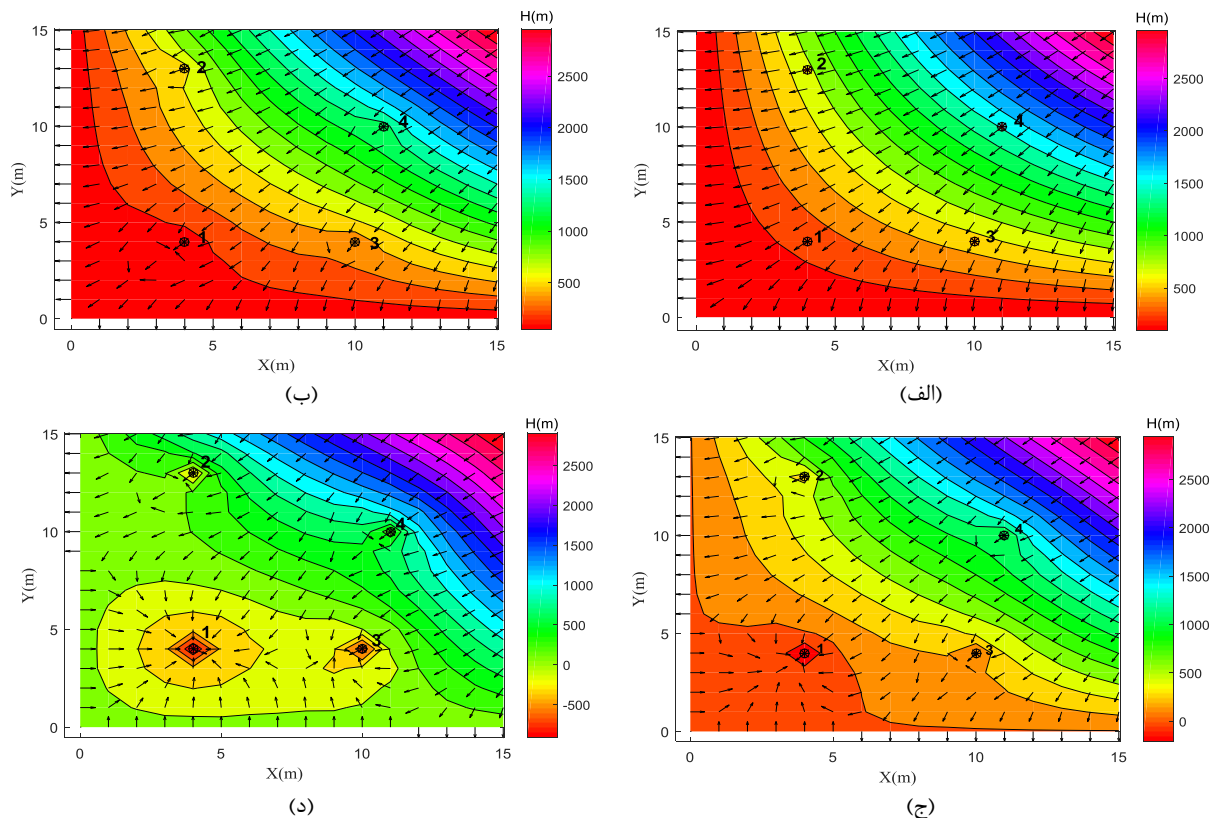
مدل غیرماندگار برای یک ماه، یک، دو و پنج سال اجرا شد، که نتایج آن در ادامه به تصویر کشیده شده است. شکل ۷ نمایش سه‌بعدی آبخوان را نشان می‌دهد. قسمت الف پس از گذشت یک ماه است، با توجه به اینکه چاه‌ها در حال برداشت هستند، تغییر محسوس از جهت افت سطح آب، در نواحی چاه‌ها دیده نمی‌شود. قسمت ب پس از گذشت یک سال از آبخوان است؛ افت سطح آب در چاه‌ها محسوس



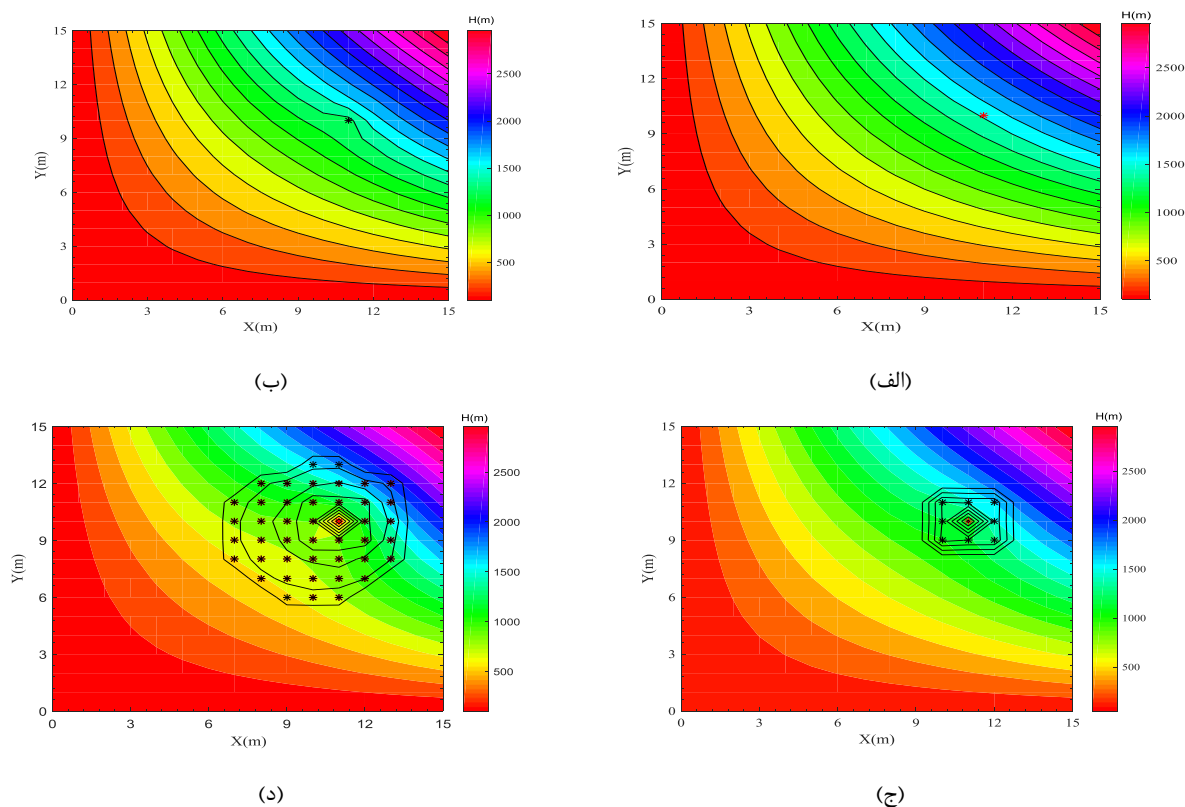
شکل ۷. تغییرات سه‌بعدی سطح آب زیرزمینی طی الف) یک ماه، ب) یک سال، ج) دو سال، د) پنج سال

شده است تا بتوان راحت‌تر این ناحیه ایجادشده را طی دوره بررسی و تحلیل کرد. حریم کمی برای نقاطی ترسیم می‌شود که اختلاف سطح آب زیرزمینی آنها قبل و بعد از برداشت طی دوره، بیشتر مساوی ۱۶۵ متر است. نقاط با رنگ مشکی این نواحی را نشان می‌دهند. در قسمت الف شکل ۹ حریم کمی تشکیل نشده است و دلیل آن زمان کوتاه پمپاژ از چاه است. در قسمت ب فقط خود چاه است که اختلاف هد بیشتر از ۱۶۵ متر دارد و رنگ آن به مشکی تغییر یافته است. در قسمت ج که آبخوان را پس از گذشت دو سال نشان می‌دهد، نقاط مشکی به‌وضوح دیده می‌شوند. توسعه حریم کمی در خلاف سمت شیب در قسمت د شکل ۹ کاملاً مشخص شده است.

شکل ۸ تغییر سطح آب زیرزمینی را در حالت دوبعدی نشان می‌دهد. در این شکل خشک شدن چاه یک پس از گذشت دو سال کاملاً مشهود و مشخص است. در قسمت الف چون طول دوره پمپاژ کم بوده، تغییری در تراز سطح آب در چاه‌ها به وجود نیامده است. با افزایش طول دوره، افت سطح آب بیشتر مشخص می‌شود. در قسمت ج شکل ۸ نزول سطح آب کاملاً مشهود است، به طوری که چاه ۱ خشک شده و افت ۷۵/۱۰ متری داشته است. با افزایش میزان بهره‌برداری از چاه‌ها (قسمت د)، علاوه بر چاه یکم، چاه‌های ۲ و ۳ خالی از آب شده و خشک می‌شوند. در شکل ۹ حریم کمی برای فقط یک چاه (چاه ۴) رسم



شکل ۸. تغییرات دوبعدی سطح آب زیرزمینی طی الف) یک ماه، ب) یک سال، ج) دو سال، د) پنج سال



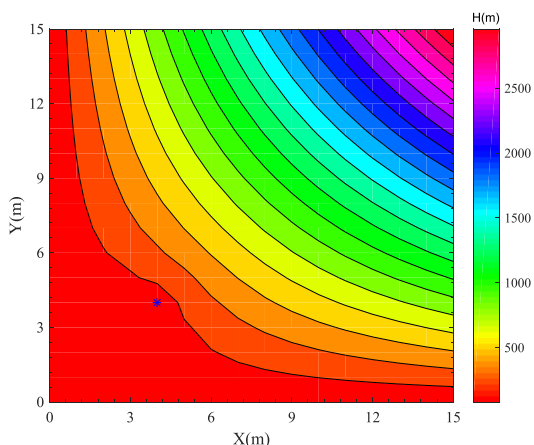
شکل ۹. حریم کمی چاه ۴ طی الف) یک ماه، ب) یک سال، ج) دو سال، د) پنج سال

بیشتر را دارد، زیرا بقیه چاه‌ها سطح آب صفر دارند و خالی از آب شده‌اند.

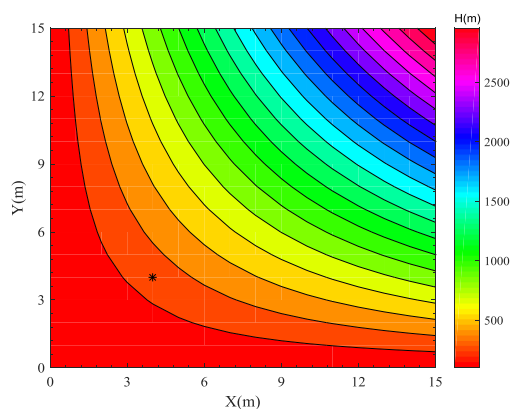
تأثیر ضریب هدایت هیدرولیکی در حریم کمی چاه
تأثیر تغییرات ضریب هدایت هیدرولیکی بر مساحت و عرض حریم کمی، از دیگر مواردی است که در مطالعه حاضر بررسی شده است. حریم کمی برای دو سال و اختلاف هد بیشتر، مساوی ۵۰ متر ترسیم شد. همچنین، سه مقدار برای ضریب هدایت هیدرولیکی در نظر گرفته شد. قسمت‌های الف، ب و ج شکل ۱۲ حریم کمی را برای ضرایب هدایت هیدرولیکی به ترتیب ۱۰، ۱۵ و ۲۰ متر بر روز نشان می‌دهند.

شکل ۱۰ حریم کمی را برای چاه ۱ طی چهار دوره یادشده نشان می‌دهد. با گذشت زمان، افت سطح آب در چاه بیشتر شده و در پی آن، حریم کمی بزرگ‌تر می‌شود. کشیدگی و گسترش این ناحیه در سمت خلاف جهت شیب بیشتر است و نتایج این مهم را به‌وضوح نشان می‌دهد.

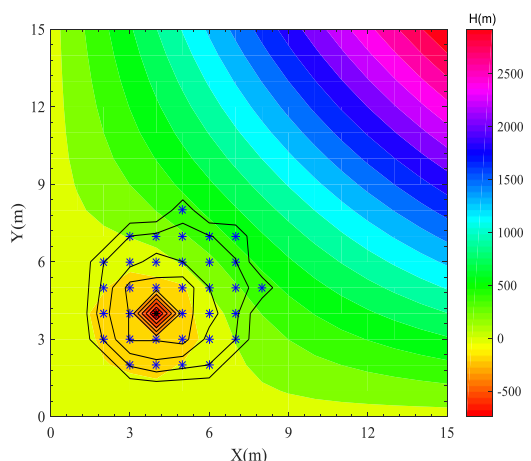
شکل ۱۱ حریم کمی چاه‌ها را در ارتباط با یکدیگر نشان می‌دهد. به بیانی دیگر، حریم کمی برای حالتی است که هر چهار چاه در حال بهره‌برداری باشند. نوع شکل ایجادشده بیضی و در خلاف جهت شیب است. با افزایش طول دوره و برداشت روزانه، مساحت این ناحیه بیشتر می‌شود. در قسمت د مساحت حریم کمی برای چاه‌ها توسعه یافته است و فقط چاه ۴ است که امکان گسترش



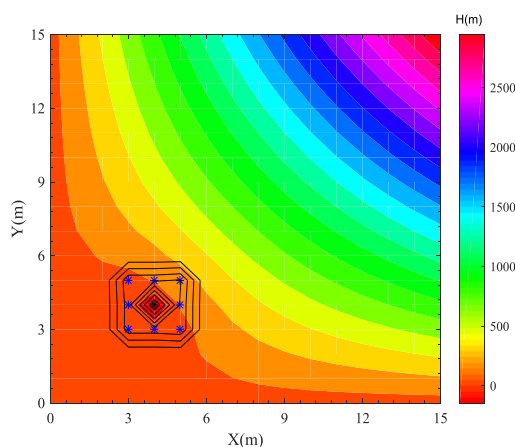
(ب)



(الف)

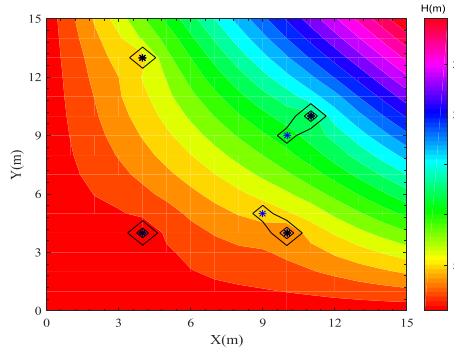


(د)

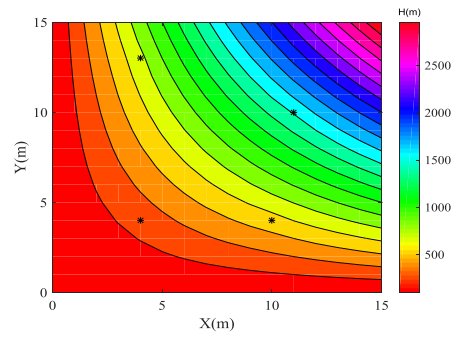


(ج)

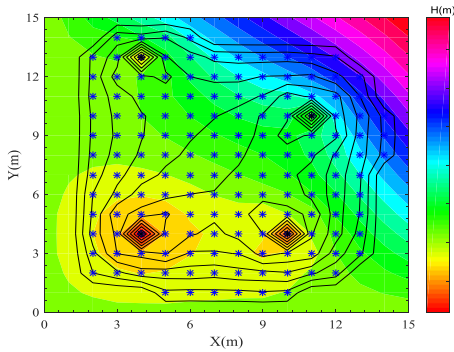
شکل ۱۰. حریم کمی چاه ۱ طی الف) یک ماه، ب) یک سال، ج) دو سال، د) پنج سال



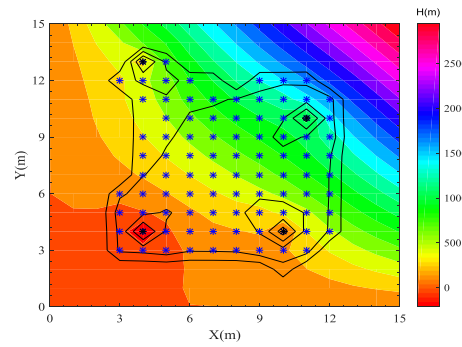
(ب)



(الف)

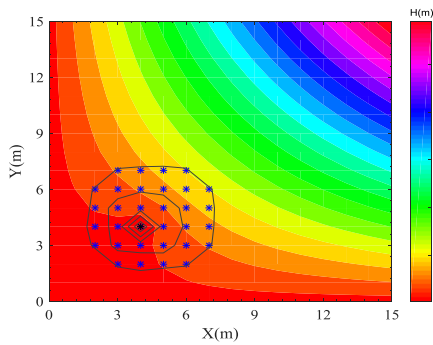


(د)

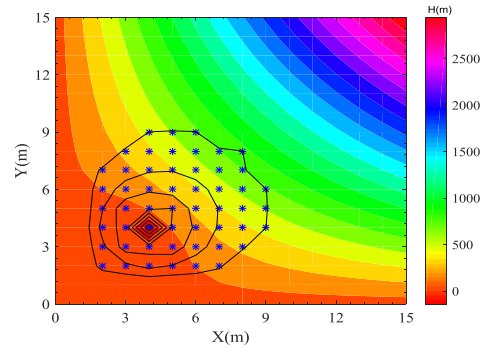


(ج)

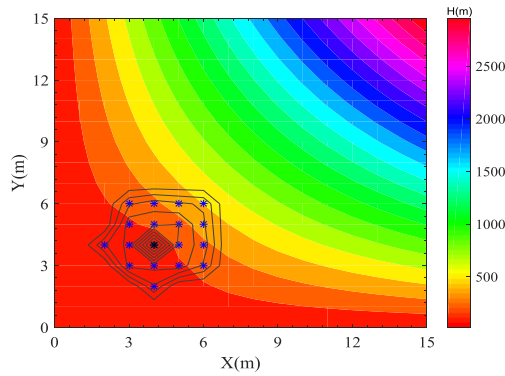
شکل ۱۱. حریم کمتی چاه در صورت برداشت همزمان همه چاهها



(ب)



(الف)



(ج)

شکل ۱۲. حریم کمتی برای ضرایب هدایت هیدرولیکی: الف) ۱۰، ب) ۱۵ و ج) ۲۰ متر بر روز

با افزایش مقدار ضریب ذخیره، مساحت حریم کمی کوچک‌تر می‌شود. کمتر شدن مساحت را می‌توان با شمارش تعداد نقاط آبی شکل‌های ۱۳ به اثبات رساند.

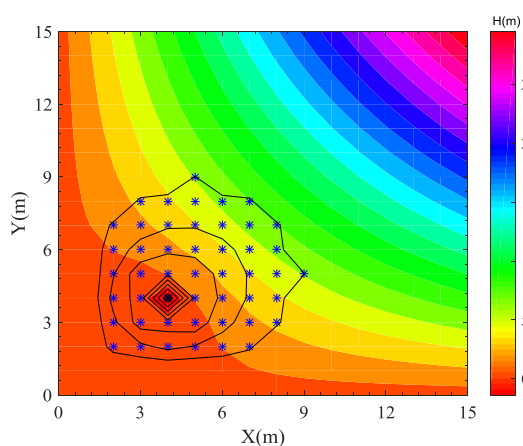
مثال واقعی ترسیم حریم کمی

در مطالعه محتشمی و همکارانش، سطح آب به دست آمده از روش بدون شبکه در حالت ماندگار با تراز آب زیرزمینی مشاهده شده در چاه‌های مشاهداتی مقایسه شد و مقادیر خطا به دست آمد. نتایج، دقت زیاد روش بدون شبکه را در مدل سازی سطح آب در حالت ماندگار نشان داد [۲۴]. شکل ۱۴ آبخوان بیرجند که براساس پارامتر سطح آب مدل سازی شده درون یابی شده است را در حالت ماندگار نشان می‌دهد.

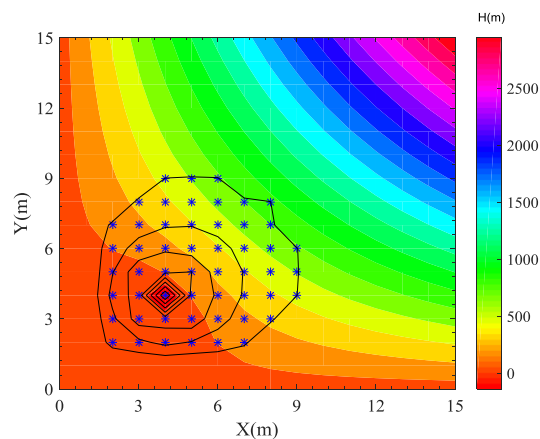
همان طور که از شکل پیداست، با افزایش مقدار ضریب هدایت هیدرولیکی عرض و به تبع آن، مساحت حریم کمی کمتر می‌شود. همچنین، اگر تعداد نقاطی که به رنگ آبی هستند، مقایسه شوند؛ با افزایش ضریب هدایت هیدرولیکی، تعداد نقاط کم و کمتر می‌شود.

تأثیر ضریب ذخیره در حریم کمی چاه

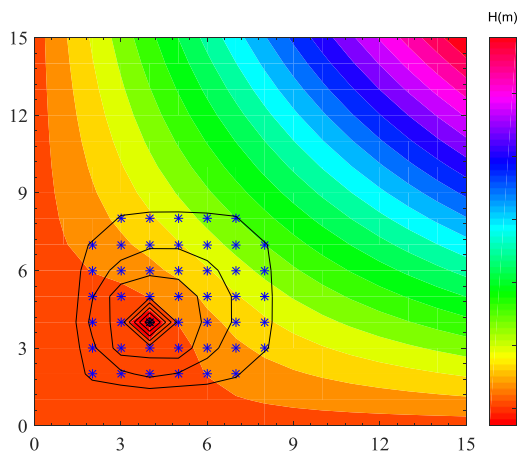
تأثیر پارامتر ضریب ذخیره نیز روی حریم کمی بررسی شد که نتایج آن در شکل‌های ۱۳ دیده می‌شود. طی دوره زمانی دوساله و اختلاف هد بیشتر، مساوی ۵۰ متر برای ضرایب ذخیره ۰/۲، ۰/۴ و ۰/۶ به ترتیب قسمت‌های الف، ب و ج شکل ۱۳ ترسیم می‌شوند.



(ب)

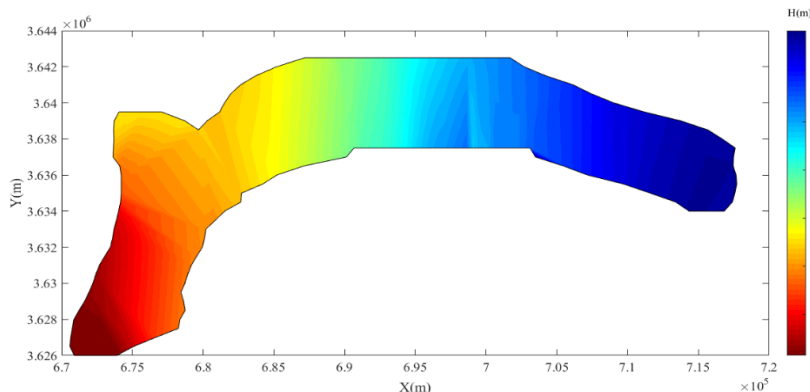


(الف)



(ج)

شکل ۱۳. حریم کمی برای ضرایب ذخیره: الف) ۰/۲، ب) ۰/۴، ج) ۰/۶



شکل ۱۴. نتایج مدل سازی به کمک روش بدون شبکه در حالت ماندگار

شرق به غرب کاهش می یابد. روند افت سطح آب در انتهای دوره نسبت به ابتدای دوره در شکل ۱۵ مشخص شده است. همچنین، جدول خطای روش بدون شبکه در حالت غیر ماندگار در جدول ۳ آمده است.

جدول ۳. محاسبه خطای میانگین، مطلق میانگین و جذر میانگین مربعات در حالت غیر ماندگار [۲۰]

خطای میانگین (متر)	۰/۰۸-
خطای مطلق میانگین (متر)	۰/۵۷۳
خطای جذر میانگین مربعات (متر)	۰/۷۵۷

خطای مدل عددی روش بدون شبکه نسبت به داده های مشاهداتی در جدول ۲ مشخص شده است.

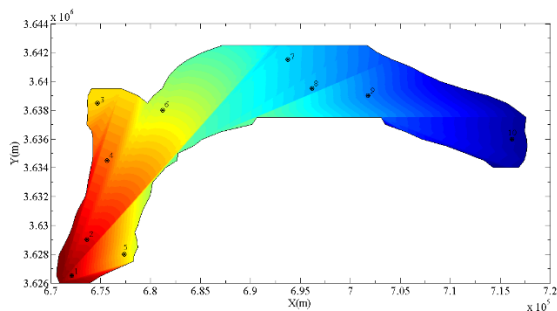
جدول ۲. محاسبه خطای میانگین، مطلق میانگین و جذر میانگین مربعات در حالت ماندگار [۲۴]

خطای میانگین (متر)	۰/۲۳۴
خطای مطلق میانگین (متر)	۰/۳۸۱
خطای جذر میانگین مربعات (متر)	۰/۴۸۳

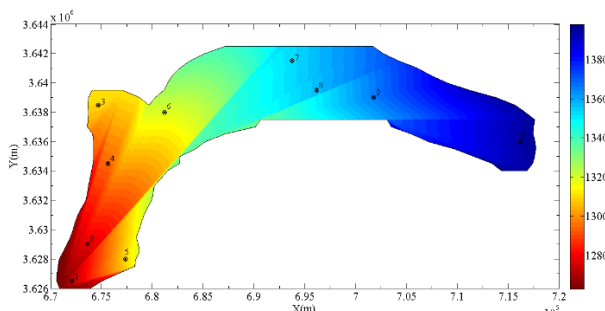
نتایج و بحث

به منظور ترسیم حریم کمی چاه ها در آبخوان آزاد بیرجند، دو چاه نمونه از ۱۹۰ چاه موجود در آبخوان انتخاب شدند. معیار انتخاب این نقاط، فاصله زیاد آنها با دیگر چاه های آبخوان است که می توان به راحتی ناحیه حریم را در آنها ارزیابی کرد.

پس از اجرای مدل در حالت ماندگار، سطح آب در حالت غیر ماندگار برای نقاط پخش شده داخل آبخوان محاسبه شد. در حالت غیر ماندگار، پارامتر آبدهی ویژه به عنوان ورودی به آبخوان معرفی شده و سپس مدل اجرا می شود. شکل ۱۵ آبخوان درون یابی شده براساس پارامتر سطح آب در گام های زمانی نخست و آخر را نشان می دهد. با توجه به شکل ۱۵، ارتفاع سطح آب زیرزمینی از

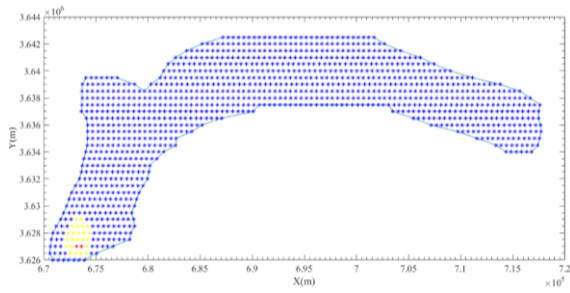


(ب)

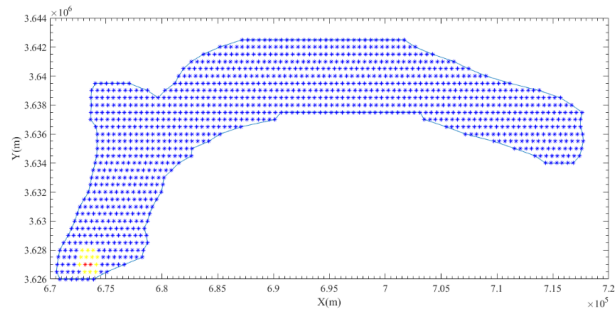


(الف)

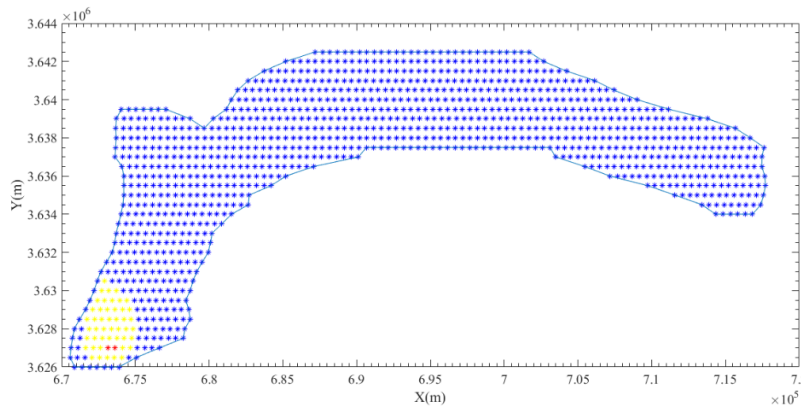
شکل ۱۵. نتایج مدل سازی سطح آب در حالت غیر ماندگار: (الف) ابتدای دوره، (ب) انتهای دوره



(ب)



(الف)



(ج)

شکل ۱۶. گسترش حریم کمی برای اختلاف سطح آب: (الف) ۵ سانتی‌متر، (ب) ۳/۵ سانتی‌متر و (ج) ۲ سانتی‌متر

که حریم کمی نسبت به شکل قبلی مساحت بیشتری داشته و گسترده‌تر باشد. شکل تقریباً بیضی‌مانند را هم در این حالت می‌توان مشاهده کرد، اما تقارن قبلی را ندارد. دلیل آن وجود نقاطی با ضریب هدایت هیدرولیکی بیشتر در سمت راست حریم است که با افزایش این مقدار، افت سطح آب و به طبع تعداد نقاطی که داخل حریم می‌افتند، کاهش می‌یابد. اگر دقت شود، سمت راست بیضی حریم، نسبت به سمت چپ آن گسترده‌تر نشده است و به محدوده نقاطی که هدایت هیدرولیک آنها بیشتر بوده ورود پیدا نکرده است.

شکل ۱۶-ج اختلاف سطح آب بیشتر و مساوی ۲ سانتی‌متر را نشان می‌دهد. بزرگ‌تر شدن این ناحیه نسبت به شکل‌های قبل کاملاً قابل پیش‌بینی بوده و قسمت انتهایی حریم حالت بیضی‌مانند خود را از دست داده است. اگر دقت شود، چگونگی گسترش آن به شکلی است که به سمت نقاط با هدایت هیدرولیکی کمتر می‌رود. هرچه اختلاف سطح آب کمتر شود، گسترش این ناحیه به سمت نقاط با ضریب هدایت هیدرولیکی کمتر هم بیشتر می‌شود.

شکل ۱۶ حریم کمی را برای دو چاه نمونه نشان می‌دهد. نقاط آبی، نقاط پخش‌شده در آبخوان و مرز هستند که معادلات روی هر یک از آنها اعمال شده است. دو نقطه قرمز رنگ موقعیت و مکان چاه‌های انتخاب‌شده را نشان می‌دهند. در نهایت، نقاطی که با رنگ زرد متمایز از بقیه هستند، حریم کمی را برای چاه‌ها ارائه کرده‌اند. این نواحی از اختلاف سطح آب در ابتدا و انتهای دوره به دست آمده‌اند. زمانی که این اختلاف بیشتر و مساوی ۵ سانتی‌متر باشد، شکل ۱۶-الف به دست می‌آید. در این شکل نقاطی از آبخوان که سطح آب در انتهای دوره ۵ سانتی‌متر و یا بیشتر از آن افت می‌کند را نشان می‌دهد. شکل بیضی‌مانند تقریباً متقارن این ناحیه، ثابت‌بودن مقادیر هدایت هیدرولیکی را که نسبت به آب‌دهی ویژه تأثیر بیشتری در شکل حریم دارد را نشان می‌دهد و این مهم را با توجه به پلی‌گون‌های هدایت هیدرولیکی که در شکل ۴-الف آمده است، می‌توان بررسی کرد.

شکل ۱۶-ب برای زمانی است که این اختلاف سطح، بیشتر و مساوی ۳/۵ سانتی‌متر باشد. بنابراین، بدیهی است

منابع

- [1]. Rock G, Kupfersberger H, Numerical delineation of transient capture zones, *Journal of Hydrology*, 2002;269:134-149.
- [2]. Bear J, Jacobs M, On the Movement of Water Bodies Injected into Aquifers, *Journal of Hydrology*, 1965;3:37-57.
- [3]. Javandel I, Tsang C, Capture zone type curves: a tool for aquifer cleanup, *Ground Water*, 1986;24:616-625.
- [4]. Lerner D N, Well catchments and time-of-travel zones in aquifers with recharge, *Water Resources Management*, 1992;28(10):2621-2628.
- [5]. Springer A E, Bair E S, Comparison of methods used to delineate capture zones of wells: 2. Stratified-drift buried-valley aquifer, *Groundwater*, 1992;30(6):908-917.
- [6]. Kinzelbach W, Marburgger M, Chiang W, Determination of groundwater catchment areas in two and three spatial dimensions, *Journal of Hydrology*, 1992;134:221-246.
- [7]. Grubb S, Analytical model for estimation of steady-state capture zones of pumping wells in confined and unconfined aquifers, *Ground Water*, 1993;31:27-32.
- [8]. Yeo I, Lee K, Analytical solution for arbitrarily located multiwells in an anisotropic homogeneous confined aquifer, *Water Resources Research*, 2003;39:1-5.
- [9]. Fienen M, Lou J, Kitanidis P, Semi-analytical homogeneous anisotropic capture, *Journal of Hydrology*, 2005;312:39-50.
- [10]. Intaraprasong T, Zhan H, Capture zone between two streams, *Journal of Hydrology*, 2007;338:297-307.
- [11]. Asadi-Aghbolaghi M, Rakhshanderoo G. R, Kompani-zare M, Analytical solutions for the capture zone of a pumping well near a stream, *Hydrogeology Journal*, 2011;19:1161-1168.
- [12]. Samani N, Zarei-Doudeji S, Capture zone of a multi-well system in confined and unconfined wedge-shaped aquifers, *Advances in Water Resources*, 2012;39:71-84.
- [13]. Zarei-Doudeji S, Samani N, Capture zone of a multi-well system in bounded peninsula-shaped aquifers, *Journal of contamination hydrology*, 2014;164:114-124.
- [14]. Zarei-Doudeji S, Samani N, Capture Zone of a Multi-Well System in Bounded Rectangular-Shaped Aquifers: Modeling and Application, *International journal of science technology and society*, 2016;3.

اگرچه ضریب آبدهی ویژه نیز تأثیر مستقیم دارد، با توجه به مقدار کم آن در این محدوده خیلی عامل تعیین کننده نیست.

در همه قسمت‌های شکل ۱۶، گسترش و توسعه حریم در خلاف جهت شیب بوده است. با توجه به توپوگرافی و نقشه‌های سنگ بستر منطقه مطالعه شده، سمت شرق این آبخوان نسبت به غرب در ارتفاع بالاتری قرار دارد و یا به بیانی، جهت شیب منطقه از شرق به جنوب غرب است و این مهم در چگونگی توسعه حریم کمی چاه‌ها هم دیده می‌شود.

نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر حریم کمی چاه‌ها برای یک آبخوان محصور و یک آبخوان آزاد واقعی به کمک روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین تعیین و ترسیم شدند. به این منظور، ابتدا سطح آب زیرزمینی در همه گره‌ها در کلیه دوره‌های زمانی محاسبه شدند. سپس، میزان افت سطح آب در نقاط اطراف چاه‌ها محاسبه شدند. در صورتی که این میزان افت از یک مقدار مشخص کمتر باشد، نقطه متناظر داخل حریم قرار می‌گیرد. در آبخوان محصور افت سطح آب طی یک دوره پنج‌ساله بررسی شد و سپس حریم کمی چاه‌ها برای این آبخوان ترسیم شدند. همچنین، چگونگی توسعه شکل این ناحیه ترسیم شد. نتایج نشان دادند با گذشت زمان و برداشت متوالی از چاه‌ها حریم کمی چاه‌ها به صورت یک بیضی در خلاف جهت شیب گسترش می‌یابد. همچنین، تأثیر افزایش ضریب هدایت هیدرولیکی و ضریب ذخیره ارزیابی شد. نتایج نشان داد با افزایش هر یک از این پارامترها، عرض و مساحت ناحیه حریم کمی کمتر می‌شود. تأثیر افزایش ضریب هدایت هیدرولیکی در کاهش حریم کمی نسبت به افزایش ضریب ذخیره به مراتب بیشتر بوده و دلیل آن بزرگی مقدار این ضریب است. در آبخوان واقعی بیرجند واقع در استان خراسان جنوبی حریم کمی برای دو چاه نمونه که در قسمت شرقی آبخوان قرار داشتند، ترسیم شدند. نتایج نشان دادند چگونگی گسترش ناحیه حریم، بیضی‌مانند و در خلاف جهت شیب است. همچنین، توسعه و گسترش این ناحیه به سمت نقاط با ضریب هدایت هیدرولیکی کمتر است.

- [15]. Staboultzidis A G, Dokou Z, Capture Zone Delineation and Protection Area Mapping in the Aquifer of Agia, Crete, Greece, *Environmental process*, 2017;4(1):95-112.
- [16]. Feo A, Zanini A, Petrella E, Celico F, A Python Script to Compute Isochrones for MODFLOW, *Groundwater*, 2017;10:1-7.
- [17]. Atluri S N, Zhu T A, A new MESHless method (MLPG) approach in computational mechanics, *computaional mechanics*, 1998;22(2):117-127.
- [18]. Atluri S N, Zhu T A, The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics, 2000;25:169-179.
- [19]. Atluri S N, Sladak J, Zhu T, Local boundary integral equation (LBIE) and it's meshless implementation for linear elasticity, 2000;25(2):180-198.
- [20]. Mohtashami A, Akbarpour A, Mollazadeh M, Development of two dimensional groundwater flow simulation model using meshless method based on MLS approximation function in unconfined aquifer in transient state, *Journal of Hydroinformatics* 2017;19(5):640-652.
- [21]. Liu G, *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, Boca Raton: CRC press, 2002.
- [22]. Liu G R, Gu Y T, *An introduction to Meshfree Methods and Their Programming*, Singapore: Springer, 2005.
- [23]. Porfiri M, *Analysis by Meshless Local Petrov-Galerkin Method of Material Discontinuities, Pull-in Instability in MEMS, Vibrations of Cracked Beams, and Finite Deformations of Rubberlike Materials*, Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University, 2006.
- [24]. Mohtashami A, Akbarpour A, Mollazadeh M, Modeling of groundwater flow in unconfined aquifer in steady state with meshless local Petrov-Galerkin, *Modares Mechanical Engineering*, 2017;17(2):393-403.
- [25]. Mategaonkar M, Eldiho T I, Simulation of groundwater flow in unconfined aquifer using meshfree point collocation method, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2011;35:700-707.
- [26]. Swathi B, Eldho T I, Groundwater flow simulation in confined aquifers using meshless Local Petrov-Galerkin, *ISH Journal of Hydraulic engineering*, 2013;19:335-348.
- [27]. Swathi B, Eldho T I, Groundwater flow simulation in unconfined aquifers using meshless local Petrov-Galerkin method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2014;48:43-52.
- [28]. Swathi B, Eldho T I, Aquifer parameter and zonation structure estimation using meshless local Petrov-Galerkin method and particle swarm optimization, *Journal of Hydroinformatics*, 2018;20(2):457-467.