

## حل دقیق پاسخ جریان آب زیرزمینی در آبخوان بسته به تغییرات سطح آب رودخانه

ایرج سعیدپناه<sup>۱\*</sup>، سمیه محمدزاده روفچائی<sup>۲</sup>

۱. استادیار گروه عمران دانشکده مهندسی، دانشگاه زنجان

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران، دانشگاه زنجان

(تاریخ دریافت ۱۳۹۸/۰۲/۳۱؛ تاریخ تصویب ۱۳۹۸/۰۵/۳۱)

## چکیده

در پژوهش حاضر یک مدل ریاضی به منظور شبیه‌سازی اندرکنش بین جریان آب زیرزمینی و تغییرات تراز آب رودخانه و همچنین بررسی نوسانات هد هیدرولیکی در آبخوان مجاور رودخانه جزر و مدی با به دست آوردن یک حل دقیق ارائه شده است. این مدل ریاضی براساس مفاهیم هیدرولیک جریان آب زیرزمینی تحت تأثیر تغییرات تراز آب رودخانه و تغییرات سطح آب زیرزمینی ناشی از نوسانات مرز سمت چپ آبخوان پایه‌گذاری شده است. دو مسئله پایین افتادن و بالا رفتن سطح آب رودخانه بررسی شده است. بررسی محاسبات نشان می‌دهد با دور شدن از مرز جزر و مدی، مقادیر نوسانات کاهش می‌یابد و موج‌هایی با دامنه نوسان کمتر ایجاد می‌شوند. تأثیر جزر و مد در مقاطع بین ۱ تا ۲ کیلومتری از مرز جزر و مدی چشمگیرتر است و همچنین با افزایش قابلیت انتقال، میزان هد هیدرولیکی سطح آب افزایش می‌یابد و در مقطع با فاصله ۷۰۰ متر از مرز جزر و مدی، تأثیرات تغییر قابلیت انتقال روی هد سطح آب چشمگیر است. برای صحت‌سنجی حل دقیق ارائه شده از نرم‌افزار Modflow استفاده شد. مقایسه نتایج به دست آمده از حل دقیق و نرم‌افزار Modflow، کارآمد بودن حل دقیق ارائه شده برای شبیه‌سازی اندرکنش بین هیدرولیک آبخوان بسته و رودخانه جزر و مدی را نشان می‌دهد.

**کلیدواژگان:** آبخوان بسته، اندرکنش آبخوان و رودخانه، جریان غیردائمی آب زیرزمینی، روش تفکیک متغیرها، مدل ریاضی.

## مقدمه

آب‌های سطحی و زیرزمینی در تعامل مداوم با هم هستند و به دلیل تأثیر آنها روی مدیریت آب و بهره‌برداری از منابع آن، اهمیت زیادی دارند [۱]. با توجه به افزایش جمعیت کشورها و در نتیجه، بهره‌برداری بیش از حد از آب‌های زیرزمینی، پژوهش در مورد اندرکنش آب زیرزمینی در آبخوان‌های مجاور با ساحل و رودخانه‌های جزر و مدی مورد توجه محققان واقع شده است. همچنین، رفتار دینامیکی جریان آب زیرزمینی تأثیر زیادی بر رفع بسیاری از مشکلات زیست‌محیطی و مهندسی ساحل دارد. از جمله اینکه در صورت مدیریت صحیح و عدم برداشت بی‌رویه از آبخوان‌های ساحلی، رفتار دینامیکی جریان آب زیرزمینی تأثیر زیادی بر دور کردن آب‌های شور و آلودگی‌های دریایی به سمت دریا دارد [۲].

جریان آب زیرزمینی به وسیله معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همراه با شرایط مرزی و اولیه توصیف می‌شود. بنابراین، بسیاری از محققان با انجام پژوهش در مورد اندرکنش آب زیرزمینی در آبخوان‌های مجاور با ساحل و رودخانه، راه‌حل‌های مختلفی از جمله روش‌های عددی و یا روش‌های تحلیلی ارائه دادند. حل تحلیلی مسائل آب‌های زیرزمینی برای محققان مهندسی آب اهمیت زیادی دارد. حل تحلیلی یکی از راه‌های مناسب برای صحت‌سنجی روش‌های عددی محسوب می‌شود. در روش‌های عددی خطاهایی وجود دارد که به واگرا شدن جواب‌ها منجر می‌شود. همچنین، یک حل تحلیلی قادر است براساس تعداد اندکی از پارامترها، پاسخی سریع‌تر و دقیق‌تر برای مسائل ارائه دهد. از مزایای دیگر روش‌های تحلیلی می‌توان به تسهیل و تسریع کردن درک مسائل اشاره کرد. براساس روش‌های تحلیلی می‌توان تأثیر هر پارامتر را به طور واضح در پاسخ مسئله تبیین کرد. تعدادی از محققان از روش‌های تحلیلی برای حل مسائل هیدرولیک جریان آب‌های زیرزمینی استفاده کرده‌اند. بنابراین، محققان بسیاری حل‌های تحلیلی گوناگون را برای توصیف نوسانات آب زیرزمینی در آبخوان‌های مجاور رودخانه‌ها و آبخوان‌های ساحلی ارائه داده‌اند. از جمله سعیدپناه و گل‌محمدی (۲۰۱۷) حل‌های تحلیلی جدیدی را برای آبخوان مجاور با چندین رودخانه و همچنین بین دو رودخانه موازی ارائه دادند [۳ و ۴]. دانگ و همکاران (۲۰۱۲) نوسانات سطح آب زیرزمینی بر اثر تغییرات سطح آب دریا در نواحی ساحلی را بررسی کردند [۵]. گو و همکاران (۲۰۰۷)

نوسانات هد هیدرولیکی جریان آب زیرزمینی بر اثر جزر و مد برای سیستم آبخوان‌های چندلایه را تجزیه و تحلیل کردند [۶]. هوانگ و همکاران (۲۰۱۲) حل تحلیلی نوسانات سطح آب زیرزمینی آبخوان یک جزیره که در تماس با دو شرط مرزی جزری و مدی موازی است را ارائه دادند [۷]. مس و دی‌لنج (۱۹۸۷) با بررسی انجام‌گرفته روی رودخانه کم‌عمق و نوسانی در هلند، مشاهده کردند که نوسان آب‌های زیرزمینی در چند پیرومتر در نزدیکی رودخانه کم‌عمق جزر و مدی بیش از نوسان رودخانه است [۸]. جایو و تانگ (۱۹۹۹) حل تحلیلی برای بررسی تأثیر نشت در پاسخ جزر و مد آب زیرزمینی در آبخوان نشتی بسته را بررسی کردند [۹]. تانگ و جایو (۲۰۰۱) حل تحلیلی دوبعدی آبخوان بسته نشتی در مجاورت سطح آب دارای نوسان را به دست آوردند [۱۰]. لی و همکاران (۲۰۰۷) حل تحلیلی را برای توصیف پاسخ جریان آب‌های زیرزمینی به نوسانات جزر و مد ارائه دادند [۱۱]. لی و جیو (۲۰۰۲) به پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی و برآورد پارامترهای سیستم آبخوان نشتی با مرز L شکل پرداختند [۱۲]. گو و همکاران (۲۰۱۰) حل تحلیلی آبخوان بسته که شامل دو ناحیه با پارامترهای هیدرولیکی متفاوت است را توسعه دادند و به این نتیجه رسیدند که وقتی دامنه نوسانات سطح آب زیرزمینی نسبت پارامترهای هیدرولیکی دو منطقه بزرگ‌تر شود، زیادتر می‌شود [۱۳]. بانسال و داس (۲۰۰۹) یک حل تحلیلی برای آبخوان بسته در تماس با یک رودخانه ارائه دادند [۱۴]. حل تحلیلی آنها برای حالتی است که آبخوان در تماس با یک جریان با سطح متغیر است. سینگ (۲۰۰۴) پاسخ آبخوان به تغییرات سطح آب در یک رودخانه با بستر نیمه‌تراوا را تجزیه و تحلیل کرد [۱۵]. همچنین، در مورد اندرکنش آبخوان و آب‌های سطحی می‌توان به کار الفکی و همکاران (۲۰۰۷) نیز اشاره کرد [۱۶].

چن و همکاران (۲۰۱۰) از مدل‌سازی عددی توسط نرم‌افزار Modflow استفاده کردند و به تخمین جریان نفوذی با توجه به تغییرات تراز رودخانه پرداختند [۱۷]. بانسل و داس (۲۰۱۱) حل تحلیلی را توسط معادله بوسینسک خطی توسعه دادند و حساسیت جریان نسبت به پارامترهای مختلف را تجزیه و تحلیل کردند [۱۸]. دانگ و همکاران (۲۰۱۲) از تبدیل فوریه برای ارائه حل تحلیلی استفاده کردند و نتایج آن را با روش مدل‌سازی عددی توسط نرم‌افزار Modflow مقایسه کردند. پژوهشگران یادشده نشان دادند حل تحلیلی

[۲۸]. تولگو و بانسال (۲۰۱۲) حل‌های تحلیلی جدیدی از یک معادله بوسینسک خطی ارائه دادند که جریان آب‌های زیرزمینی را در یک سیستم آبخوان باز-آبراهه توصیف می‌کند. مقایسه نتایج تحلیلی ارائه‌شده توسط آنها و حل عددی تطابق مناسبی را نشان می‌دهد [۲۹]. همچنین، سعیدپناه و گل محمدی (۲۰۱۹) حل‌های تحلیلی جدیدی برای جریان غیر دائمی در آبخوان بسته مجاور با رودخانه و با شرایط مرزی جدید کاهش نمایی در سطح رودخانه ارائه دادند. مقایسه نتایج تحلیلی ارائه‌شده توسط آنها و نرم‌افزار Modflow، تطابق مناسبی را نشان می‌دهد [۳۰]. لیل (۲۰۰۰) معادله جریان آب زیرزمینی و جریان در کانال را به طور تحلیلی حل کرده و نتایج آن را با حل عددی به وسیله نرم‌افزار Modflow مقایسه کرد [۳۱]. در سال ۲۰۱۴ هانسن و همکارانش نوعی مدل هیدرولوژیکی مبتنی بر مدل MODFLOW به نام MODFLOW-owhm را توسعه دادند که قادر به انجام شبیه‌سازی‌های هیدرولوژیکی بود [۳۲]. همچنین، اکسیا و همکاران (۲۰۱۰) برای مدل جریان آب زیرزمینی با شرایط مرزی جزر و مدی و به وسیله معادله بوسینسک راه حل تقریبی را به دست آوردند [۳۳].

بنابراین، حل‌های تحلیلی ارائه‌شده توسط محققان به عنوان نوعی ابزار مناسب برای توصیف پاسخ جریان آب‌های زیرزمینی به تغییرات و شرایط مرزی مختلف در رودخانه‌ها از جمله نوسانات جزر و مد به شمار می‌آید. در تحقیق حاضر، با هدف پیش‌بینی هد هیدرولیکی جریان آب‌های زیرزمینی، پس از بررسی‌های انجام‌شده روی آبخوان‌ها با شرایط مرزی جزر و مدی، معادله آبخوان بسته همراه با شرایط مرزی جزر و مدی رودخانه در نظر گرفته شده و به منظور ارائه حل دقیقی از روش جداسازی متغیرها<sup>۱</sup> استفاده شده است. همچنین، صحت‌سنجی انجام‌شده نشان داد تطابق زیادی بین حل دقیق ارائه‌شده در تحقیق حاضر و حل عددی انجام‌شده به وسیله مدل Modflow وجود دارد.

### روش انجام کار

#### اندرکنش بین رودخانه و آبخوان

تبادل آب بین یک آبخوان و رودخانه، دریا یا دریاچه در واکنش تغییرات سطح آب و تغذیه آبخوان‌ها، از موارد بررسی جریان یک‌بعدی در حالات جریان غیردائمی

آنها عملکرد بهتری در پیش‌بینی سطح آب‌های زیرزمینی آبخوان ساحلی موردی دارد [۱۹]. رای و منگلیک (۲۰۱۲) حل تحلیلی را برای پیش‌بینی نوسان آب زیرزمینی توسعه دادند که در آن تغذیه متفاوت از حوضه‌های مختلف بررسی شد [۲۰]. هوانگ و همکاران (۲۰۱۴b) مدل ریاضی برای توصیف جریان سه‌بعدی آب‌های زیرزمینی توسط تبدیل لاپلاس ارائه کردند که در آن چاهی با نفوذ کامل در آبخوانی بین دو جریان موازی ایجاد شده است [۲۱]. لی و جیو (۲۰۰۱) راه حل تحلیلی برای جزر و مد آب‌های زیرزمینی ناشی از نوسانات در آبخوان نشستی ساحلی که زیر دریا گسترش یافته است، ارائه کردند و تأثیرات جزر و مد، طول گسترش زیر دریا و نشت ناشی از لایه نیمه‌تراوا در نوسانات آب‌های زیرزمینی را بررسی کردند [۲۲]. همچنین، لی و جیو (۲۰۰۳) از حل تحلیلی برای شناسایی جزر و مد ناشی از گردش آب دریا - آب زیرزمینی در یک سیستم آبخوان نشستی چندلایه استفاده کردند و با مقایسه آن با حل تقریبی پرتوربیشن، به این نتیجه رسیدند که در مکان‌هایی به دور از خط ساحلی، حل تقریبی تطابق خوبی با حل ارائه‌شده دارد [۲۳]. حسین و شوارتز (۲۰۰۳) آب زیرزمینی، سطحی و تبادل آن بین آبخوان و جریان مجاور آن را در سیستم آبراهه - آبخوان بررسی کردند. آنها معادله جریان آب زیرزمینی و جریان در کانال را به طور تحلیلی حل کرده و نتایج آن را با حل عددی به وسیله نرم‌افزار Modflow مقایسه کردند [۲۴]. کیم و همکاران (۲۰۰۷) حل تحلیلی برای بررسی اندرکنش آبراهه - آبخوان ارائه کردند و گفتند که سطح ایستابی آب زیرزمینی به آبدهی ویژه و نوسانات جریان، حساسیت نشان می‌دهد [۲۵]. اکسو و همکاران (۲۰۱۲) مدل یکپارچه‌ای برای شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی را در منطقه هتائو در حوضه رودخانه زرد از شمال چین به کار بردند. آنها به این نتیجه رسیدند که نتایج به‌دست‌آمده از برنامه‌های کاربردی نرم‌افزار Modflow بهتر از برنامه‌های دیگر در یکپارچه‌سازی عمل می‌کند [۲۶]. بودج و شارپ (۲۰۰۹) پارامترهای آبخوان ادواردز از بخش بارتون اسپرینگر را با معرفی پارامترهای متغیر مکانی در نرم‌افزار Modflow به دست آوردند [۲۷]. پالما و بنتلی (۲۰۰۷) برای شبیه‌سازی جریان در آبخوان لئون - چینندگا واقع در نیکاراگوئه، از نرم‌افزار Modflow استفاده کردند. نتایج پژوهش آنها نشان داد پمپاژ سبب کاهش پایه جریان و تخلیه رودخانه می‌شود

$$h(x,0) = H_2 \quad (1a)$$

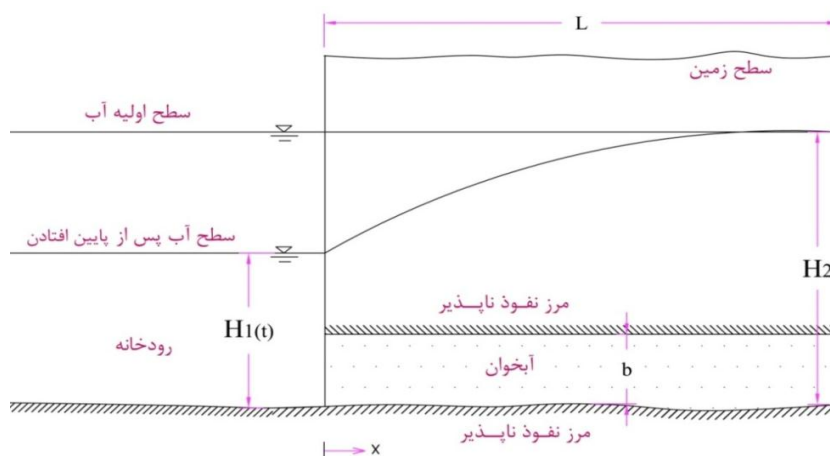
$$h(x,0) = H_2 \quad (1b)$$

$$h(L,t) = H_2 \quad (1c)$$

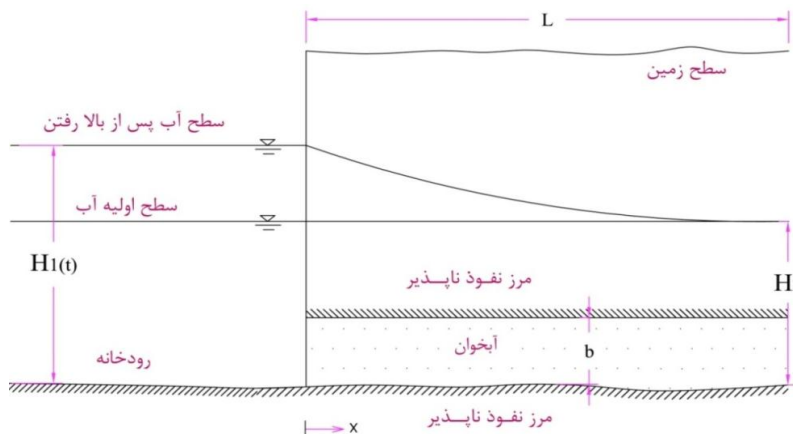
که در آن،  $h$  هد هیدرولیکی در آبخوان بسته،  $T$  قابلیت انتقال،  $S$  ضریب ذخیره آبخوان بسته،  $H_1(t)$  هد وابسته به زمان در مرز چپ،  $H_2$  هد هیدرولیکی در مرز سمت راست آبخوان یا سطح آب اولیه و  $x$  بعد افقی آبخوان است. آبخوان در مرز سمت چپ در تماس با سطح آب نوسان دار رودخانه و در فاصله  $L = 5km$  از رودخانه، هد هیدرولیکی ثابتی دارد که این هد  $H_2 = 16m$  است. همان طور که مشاهده می شود، پارامترهای هندسی  $H_2$  و  $L$  در شکل ۱ ارائه شده است. این نوسان از نوع جزر و مدی است.

هستند. پایین افتادن یا بالا رفتن سطح آب در رودخانه سبب برقراری جریان از آبخوان به سمت رودخانه یا به عکس می شود. در تحقیق حاضر با دو مسئله به بررسی جریان در رودخانه های جزر و مدی پرداخته شده است. در مسئله اول، پایین افتادن سطح آب و مسئله دوم، بالا رفتن سطح آب بررسی شده است. مرز سمت چپ رودخانه ای در حال نوسان است و سمت دیگر دامنه جریان، مرز با هد ثابت است. در شکل ۱ شرایط مربوط به مسئله اول و در شکل ۲ شرایط مربوط به مسئله دوم به صورت شماتیک در مورد جریان آب زیرزمینی مجاور یک رودخانه جزر و مدی نشان داده شده است. شرایط مرزی و اولیه مربوط به تغییرات سطح آب رودخانه در زمان  $t = 0$  عبارتند از:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{T}{S} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1)$$



شکل ۱. پایین افتادن سطح آب در سیستم هیدرولیکی رودخانه-آبخوان (مسئله اول)



شکل ۲. بالا رفتن سطح آب در سیستم هیدرولیکی رودخانه-آبخوان (مسئله دوم)

ارائه حل دقیق

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (۶)$$

با قرار دادن معادله ۶ در معادله ۴ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\dot{G}_n(t) + \lambda_n^2 \cdot G_n(t)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = F(x,t)$$

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{T}{S} \frac{n\pi}{L}}$$

در تساوی یادشده، طرف سمت چپ، برابر بسط سینوسی فوریه تابع  $F(x,t)$  است، پس داریم (رابطه ۷):

$$\dot{G}_n(t) + \lambda_n^2 \cdot G_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot F(x,t) dx \quad (۷)$$

با حل معادله ۷ داریم:

$$G_n(t) = a_n e^{-\lambda_n^2 t} + G_n^*(t) \quad (۸)$$

جواب خصوصی معادله ۷ است.  $G_n^*(t)$  در واقع

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n e^{-\lambda_n^2 t} + G_n^*(t)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (۹)$$

با استفاده از شرط (۴a) و به کارگیری بسط فوریه سینوسی داریم:

$$v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n + G_n^*(0)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = H_3(x) \quad (۱۰)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L H_3(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx - G_n^*(0)$$

بنابراین، مسئله جوابی به صورت معادله ۱۱ دارد.

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n e^{-\lambda_n^2 t} + G_n^*(t)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \left(\frac{H_2 - H_1(t)}{L}\right)x + H_1(t) \quad (۱۱)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \left(\frac{H_2 - H_1(t)}{L}\right)x + H_1(t)$$

نوسان سطح آب رودخانه به وسیله رابطه ۱۲ بیان می شود:

$$H_1(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{B}\right) + C \quad (۱۲)$$

پارامترهای A و B پارامترهای فیزیکی مربوط به نوسان سطح آب رودخانه است که پارامتر A دامنه نوسان و B پریود نوسان مربوط به سطح آب رودخانه است. این نوسان از نوع جزر و مدی است.

برای حل مسئله به جست و جوی جوابی به صورت رابطه ۲:

$$h(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \quad (۲)$$

می پردازیم و  $w(x,t)$  را طوری می یابیم که  $v(0,t) = 0$  و  $v(L,t) = 0$  شود.

بدیهی است که این مسئله فقط یک جواب ندارد، ولی چون تنها یک جواب مد نظر است، می توان به جست و جوی جوابی به صورت  $w(x,t) = ax + b$  پرداخت (رابطه ۳).

$$h(x,t) = v(x,t) + \left(\frac{H_2 - H_1(t)}{L}\right)x + H_1(t) \quad (۳)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} - H_1'(t) \cdot \left(\frac{x}{L}\right) + H_1'(t)$$

با جایگزین کردن عبارت یادشده در معادله ۱ داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H_1'(t) \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \frac{T}{S} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

در عبارت یادشده در نظر می گیریم:

$$F(x,t) = H_1'(t) \left(\frac{x}{L} - 1\right), \quad C_1 = \frac{T}{S}$$

با توجه به شرط (۱a) و معادله ۳ داریم:

$$v(x,0) = H_2 - \left(\frac{H_2 - H_1(0)}{L}\right)x - H_1(0) = H_3(x)$$

با توجه به شرایط یادشده داریم (رابطه ۴):

$$\frac{\partial v}{\partial t} - C_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x,t) \quad t > 0, \quad 0 < x < L \quad (۴)$$

$$v(x,0) = H_3(x) \quad (۴a)$$

$$v(0,t) = 0 \quad (۴b)$$

$$v(L,t) = 0 \quad (۴c)$$

مراحل حل مسئله همگن تا محاسبه عبارت ضربی انجام شد (جزئیات در پیوست ارائه حل دقیق آمده است) و معادله ۵ به دست آمد.

$$F_n(X) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۵)$$

بنابراین داریم (رابطه ۶):

آبخوان یا به بیان دیگر، ضریب قابلیت انتقال و ضریب ذخیره آبخوان هستند و پارامترهای A و B پارامترهای فیزیکی مربوط به نوسان سطح آب رودخانه هستند. پارامتر A دامنه نوسان و B پریود نوسان مربوط به سطح آب رودخانه است. این نوسان از نوع جزر و مدی است.

جدول ۱. پارامترهای استفاده شده در حل تحلیلی و عددی

پارامترها	مقادیر
A(m)	۰/۵
L(km)	۵
T(m <sup>2</sup> / hr)	۲۸/۸
B (hr)	۲۰
H <sub>2</sub> (m) S	۱۰۰
	۱۶

صحت‌سنجی حل دقیق

برای صحت‌سنجی روابط ارائه شده در پژوهش حاضر از نرم‌افزار Modflow استفاده شده است [۳۴]. محاسبات برای  $\Delta x = \Delta x = 1m$  انجام شد. فاصله زمانی در نظر گرفته شده برای Modflow یک ساعت است. همچنین، از بسته جریان LPF و روش PCG2 برای حل معادله جریان استفاده شده است. بنابراین، در شکل ۳ مقادیر به دست آمده از حل دقیق را با مقادیر به دست آمده از نرم‌افزار Modflow مقایسه کردیم و درصد خطا در جدول ۲ مشخص شده است. مشاهده می‌کنیم که تطابق زیادی بین مقادیر به دست آمده از روابط حل دقیق ارائه شده در پژوهش حاضر و مقادیر به دست آمده از نرم‌افزار Modflow وجود دارد. بنابراین، معمولاً حل تحلیلی جواب خوبی می‌دهد و نتایج به دست آمده از نرم‌افزار Modflow نیز نزدیک به واقعیت و حل دقیق ارائه شده در پژوهش حاضر است.

جدول ۲. مقایسه حل تحلیلی و عددی برای  $\Delta x = \Delta y = 1m$  در  $x=22m$

t(hr)	h(m) Analytical	h(m) MODFLOW	Error
۱۵	۱۶/۲۷۳۹۳	۱۶/۲۷۴۶۲	-۰/۰۰۰۶۹
۳۰	۱۶/۳۸۷۸۶	۱۶/۳۸۸۸۳	-۰/۰۰۰۹۷
۴۵	۱۶/۲۷۴۵۹	۱۶/۲۷۵۲۶	-۰/۰۰۰۶۸
۶۰	۱۶/۰۰۰۴۷	۱۶/۰۰۰۴۵	۱/۶۱ E-۰۵
۷۵	۱۵/۷۲۶۰۷	۱۵/۷۲۵۳۸	۰/۰۰۰۶۹۹
۹۰	۱۵/۶۱۲۱۴	۱۵/۶۱۱۱۷	۰/۰۰۰۹۷۱
۱۰۵	۱۵/۷۲۵۴۱	۱۵/۷۲۴۷۴	۰/۰۰۰۶۷۴
۱۲۰	۱۵/۹۹۹۵۳	۱۵/۹۹۹۵۵	-۱/۹ E-۰۵

با توجه به روابط یادشده و جای‌گذاری در معادله اصلی به رابطه نهایی محاسبه هدهای هیدرولیکی جریان آب زیرزمینی در زمان‌ها و مکان‌های مختلف خواهیم رسید. بنابراین، این روند را با حل معادله ۷ ادامه می‌دهیم.

$$\dot{G}_n(t) + \lambda_n^2 \cdot G_n(t) = -\frac{2}{n\pi} \left[ \frac{2\pi A}{B} * \cos\left(\frac{2\pi}{B}\right) \right] \quad (13)$$

با حل معادله ۱۳ داریم:

$$G_n(t) = a_n e^{-\lambda_n^2 * t} + G_n^*(t) \quad (14)$$

$$G_n^*(t) = -\frac{[\lambda_n^2 * \cos(\frac{2\pi}{B})] + [\frac{2\pi}{B} * \sin(\frac{2\pi}{B})]}{\frac{nB}{4A} * (\frac{4\pi^2}{B^2} + \lambda_n^4)} \quad (15)$$

با به‌کارگیری معادله ۱۰ داریم:

$$v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n + G_n^*(0)] \sin(\frac{n\pi}{L} x) = H_3(x) \quad (16)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L H_3(x) \cdot \sin(\frac{n\pi}{L} x) dx - G_n^*(0) = \frac{3}{n\pi} + \frac{\lambda_n^2}{\frac{nB}{4A} * (\frac{4\pi^2}{B^2} + \lambda_n^4)} \quad (17)$$

در نهایت، برای محاسبه هدهای هیدرولیکی جریان آب زیرزمینی در زمان‌ها و مکان‌های مختلف در سیستم آبخوان-رودخانه رابطه دقیق ۱۸ را ارائه می‌دهیم:

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n e^{-\lambda_n^2 * t} + G_n^*(t)] \sin(\frac{n\pi}{L} x) + (\frac{H_2 - H_1(t)}{2L})x + H_1(t) \quad (18)$$

پس از انجام روند استخراج حل دقیق به روش جداسازی متغیرها، به معادله ۱۸ می‌رسیم. توسط معادله ۱۸، هدهای هیدرولیکی جریان آب زیرزمینی در زمان‌ها و مکان‌های مختلف را محاسبه می‌کنیم. بنابراین، با به‌کارگیری حل دقیق استخراج شده به شبیه‌سازی و بررسی پاسخ آبخوان، به نوسانات رودخانه می‌پردازیم. انجام محاسبات مشخصات آبخوان در جدول ۱ آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پارامترهای هندسی H<sub>2</sub> و L نشان داده شده در جدول ۱، در شکل ۱ ارائه شده است. همچنین، پارامترهای T و S پارامترهای هیدرودینامیکی



شکل ۳. مقایسه هد هیدرولیکی حل دقیق ارائه شده و Modflow در مقطعی به فاصله ۲۲ متر از مرز جزر و مدی

### نتایج و بحث

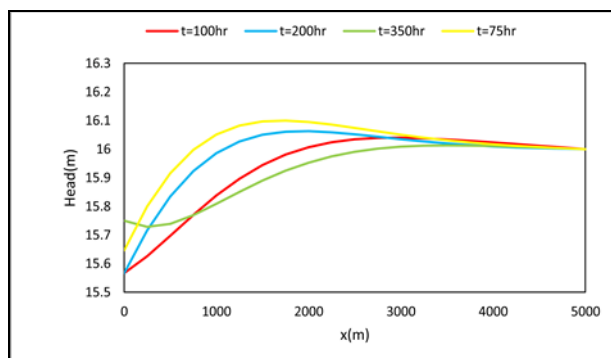
در مسئله اول پایین افتادن سطح آب بررسی شده و مقادیر هد هیدرولیکی محاسبه شده در طول آبخوان و در زمان‌های مختلف در شکل ۴ نشان داده شد. در زمان ۳۵۰ ساعت یک کاهش هد سطح آب در مقاطع ابتدایی مسیر به علت پایین افتادن سطح آب در مرز سمت چپ مشاهده شد، در صورتی که در دیگر مقاطع زمانی، پایین افتادن هد سمت چپ سبب طی شدن مسیر صعودی جریان تا اواسط مقطع مکانی می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، با توجه به جزر و مد ایجاد شده در رودخانه، دامنه نوسان هد هیدرولیکی جریان آب زیرزمینی متفاوت است.

در مسئله دوم بالا رفتن سطح آب بررسی شده و مقادیر هد هیدرولیکی محاسبه شده در طول آبخوان و در زمان‌های مختلف در شکل ۵ نشان داده شد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به علت وجود نوسانات رودخانه در برخی زمان‌ها، هد هیدرولیکی بیشتر و در برخی زمان‌های دیگر هد هیدرولیکی کمتر است. در زمان ۵۰ ساعت در ابتدای مسیر و در زمان ۲۵۰ ساعت در اواسط مسیر، یک افزایش هد هیدرولیکی برای رسیدن به شرایط مرزی سمت راست مشاهده می‌شود. بنابراین، در زمان‌های مختلف نوسانات سطح آب در طول آبخوان تا رسیدن به شرایط مرزی سمت راست کاهش می‌یابد.

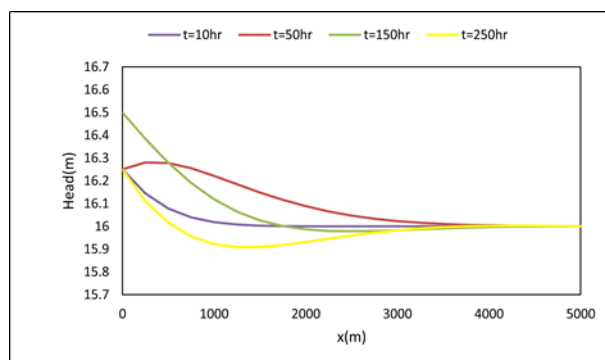
تغییرات هد هیدرولیکی آب زیرزمینی با زمان در مقاطع مختلف در طول آبخوان در شکل ۶ نشان داده شده است. تمامی این نمودارها تشکیل موج سینوسی در یک دور زمانی را نشان می‌دهند. مقادیر هد هیدرولیکی آب زیرزمینی با مقدار بیشینه و کمینه در مقطع ۱۰۰ متر

شروع می‌شوند و به سمت هد ثابت مرز راست حرکت می‌کنند و در انتهای آبخوان در سمت راست به مقدار  $H_2=16m$  می‌رسند. با دور شدن از مرز جزر و مدی، مقادیر نوسانات کاهش می‌یابد و موج‌هایی با دامنه نوسان کمتر و زمان بیشتر ایجاد می‌شود. برای محاسبه دبی ورودی و خروجی در آبخوان، به افت سطح آب در طول آبخوان نیاز است. با مشتق‌گیری از معادله ۱۸ و با استفاده از قانون دارسی مقدار دبی ورودی  $Q_{in}$  در مقطع صفر و مقدار دبی خروجی  $Q_{out}$  در مقطع انتهایی را در یک دوره زمانی محاسبه شده و در شکل ۷ نشان داده شد.

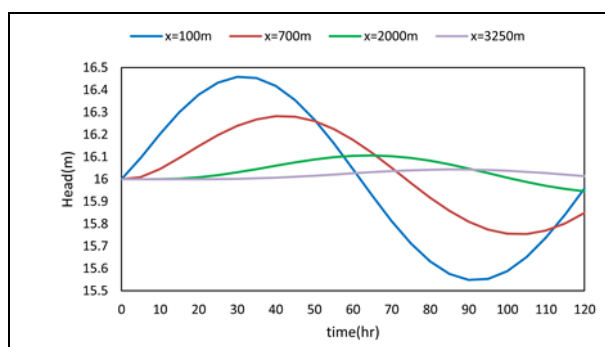
با توجه به شکل ۸ مشاهده می‌شود که با افزایش قابلیت انتقال میزان هد هیدرولیکی، سطح آب افزایش می‌یابد. این افزایش هد هیدرولیکی در مقاطع نزدیک به مرز جزر و مدی کم است و در مقطع با فاصله ۷۰۰ متر از مرز جزر و مدی تأثیرات تغییر قابلیت انتقال روی هد سطح آب چشمگیر است. در واقع، می‌توان گفت که در این آبخوان تا فاصله ۲ کیلومتری از مرز جزر و مدی افزایش قابلیت انتقال سبب افزایش هد سطح آب زیرزمینی می‌شود و بعد از آن، تغییرات سطح آب به دلیل تغییر قابلیت انتقال به وجود می‌آید، اما از میزان آن کاسته می‌شود. زیرا تأثیر نوسان سطح رودخانه بر هد سطح آب زیرزمینی در فواصل دور از مرز سمت چپ مستهملک می‌شود. به بیان دیگر، در مسئله اول و دوم با توجه شکل‌های ۴ و ۵ دامنه نوسان هد هیدرولیکی به تدریج کاهش می‌یابد و پس از حدود ۴ کیلومتر بعد از مرز سمت چپ کاملاً مستهملک می‌شود و از بین می‌رود.



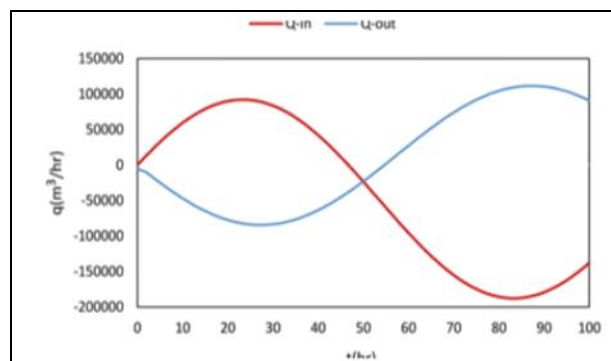
شکل ۴. مقادیر هد هیدرولیکی محاسبه شده در زمان‌های مختلف برای مسئله اول



شکل ۵. مقادیر هد هیدرولیکی محاسبه شده در زمان‌های مختلف برای مسئله دوم

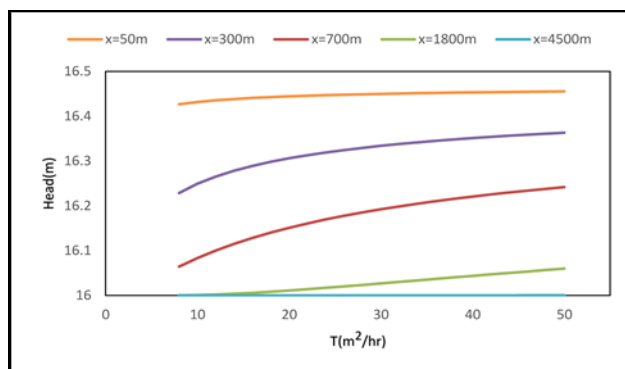


شکل ۶. مقادیر هد هیدرولیکی محاسبه شده در فواصل مختلف از رودخانه



شکل ۷. مقایسه دبی ورودی و خروجی در زمان‌های مختلف





شکل ۸. مقایسه مقادیر هد هیدرولیکی محاسبه شده در قابلیت انتقال ها و فواصل مختلف از رودخانه

### نتیجه گیری

در مقاله حاضر یک حل دقیق برای ساخت یک مدل ریاضی به منظور شبیه سازی اندرکنش بین جریان آب زیرزمینی و تغییرات تراز آب رودخانه ارائه شده است. آبخوان بسته در مجاور رودخانه جزر و مدی واقع شده است که امکان بالا رفتن و پایین آمدن سطح آب رودخانه جزر و مدی در زمان های مختلف وجود دارد. این مدل ریاضی براساس مفاهیم هیدرولیک جریان آب زیرزمینی تحت تأثیر تغییرات تراز آب رودخانه و تغییرات سطح آب زیرزمینی ناشی از نوسانات مرز سمت چپ آبخوان پایه گذاری شده است. مقایسه نتایج به دست آمده از حل دقیق و نرم افزار Modflow، کارآمد بودن حل دقیق ارائه شده برای شبیه سازی اندرکنش بین هیدرولیک آبخوان بسته و رودخانه جزر و مدی را نشان می دهد. بنابراین، این مدل پایین افتادن و بالا رفتن مرز سمت چپ آبخوان را به خوبی شبیه سازی می کند و قابل استفاده برای آبخوان های بسته با شرایط جزر و مدی است. بررسی محاسبات ناشی از حل دقیق نشان می دهد در زمان ۳۵۰ ساعت یک کاهش هد سطح آب در مقاطع ابتدایی مسیر به علت پایین افتادن سطح آب در مرز سمت چپ وجود دارد. همچنین، در زمان ۵۰ ساعت، در ابتدای مسیر و در زمان ۲۵۰ ساعت، در اواسط مسیر، یک افزایش هد هیدرولیکی برای رسیدن به شرایط مرزی سمت راست مشاهده می شود و در زمان های مختلف، نوسانات سطح آب در طول آبخوان تا رسیدن به شرایط مرزی سمت راست کاهش می یابد. همچنین، مقادیر هد هیدرولیکی آب زیرزمینی با مقدار بیشینه و کمینه در مقطع ۱۰۰ متر شروع می شوند و به سمت هد ثابت مرز راست حرکت می کنند و در انتهای آبخوان در سمت راست به مقدار ۱۶ متر می رسند. با

دور شدن از مرز جزر و مدی، مقادیر نوسانات کاهش می یابد و موج هایی با دامنه نوسان کمتر و زمان بیشتر ایجاد می شود. همچنین، بررسی محاسبات ناشی از حل دقیق نشان می دهد تأثیر جزر و مد در مقاطع بین ۱ تا ۲ کیلومتری از مرز جزر و مدی چشمگیرتر است و نوسانات هد سطح آب زیرزمینی افزایش می یابد. همچنین، با دور شدن از مرز جزر و مدی، مقادیر نوسانات کاهش می یابد و موج هایی با دامنه نوسان کمتر و زمان بیشتر برای ایجاد آن، تشکیل می شود. در ضمن، حل دقیق ارائه شده نشان می دهد با افزایش قابلیت انتقال، میزان هد هیدرولیکی سطح آب افزایش می یابد. این افزایش هد هیدرولیکی در مقاطع نزدیک به مرز جزر و مدی کم است و در فاصله ۷۰۰ متر از مرز جزر و مدی، تأثیرات تغییر قابلیت انتقال روی هد سطح آب چشمگیر است. بنابراین، می توان گفت که در این آبخوان تا فاصله ۲ کیلومتری از موج جزر و مدی، افزایش قابلیت انتقال سبب افزایش هد سطح آب زیرزمینی می شود و بعد از آن، دوباره تغییرات سطح آب به دلیل تغییر قابلیت انتقال به وجود می آید، اما از میزان آن کاسته می شود.

### منابع

- [1]. Ophocleous. M. Interactions between groundwater and surface water: the state of the science. *Journal of Hydrology*. 2002; 10: 52–67.
- [2]. Chuang M.H, Yeh H.D. An analytical solution for the head distribution in a tidal leaky confined aquifer extending an infinite distance under the sea. *Advances in Water Resources*. 2007; 30(3): 439-445.
- [3]. Saeedpanah I, Golmohamadi Azar R, New analytical expressions for two-Dimensional aquifer adjoining with streams of varying water level. *Water Resources Management*. 2017; 31(1): 403–424.

- [4]. Saeedpanah I, Golmohamadi Azar R, New analytical solutions for unsteady flow in a leaky aquifer between two parallel streams. *Water Resources Management*. 2017; 31(7): 2315–2332.
- [5]. Dong, L., Chen, J., Fu, C. and Jiang, H. Analysis of groundwater-level fluctuation in a coastal confined aquifer induced by sea-level variation. *Hydrogeology Journal*. 2012; 20: 719–726.
- [6]. Guo Q. N, Li H. L, Boufadel M. C, xia Y, Li G. Tide-induced groundwater head fluctuation in coastal multi-layered aquifer systems with a submarine outlet capping. *Advances in Water Resources*. 2007; 30(8):1746–1755.
- [7]. Huang, C.S., Yeh, H.D. and Chang, C.H. A general analytical solution for groundwater fluctuations due to dual tide in long but narrow islands. *water resources research*. 2012; 48.
- [8]. Maas, C., and W. J. De Lange. On the negative phase shift of groundwater tides near shallow tidal rivers—The Gouderak anomaly, *Journal of Hydrology*. 1987; 92: 333–349.
- [9]. Jiao, J. J., and Z. Tang. An analytical solution of groundwater response to tidal fluctuation in a leaky confined aquifer, *water resources research*. 1999; 35(3), 747–751.
- [10]. Tang ZH, Jiao, J.J. A two-dimensional analytical solution for groundwater flow in a leaky confined aquifer system near open tidal water. *Hydrological processes*. 2001; 15:573–585.
- [11]. Li, H., G. Li, J. Cheng, and M. C. Boufadel. Tide-induced head fluctuations in a confined aquifer with sediment covering its outlet at the sea floor, *water resources research*. 2007; 43(3).
- [12]. Li H, Jiao J.J. Tidal groundwater level fluctuations in L-shaped leaky coastal aquifer system. *Journal of Hydrology*. 2002; 268(1- 4): 234-243.
- [13]. Guo H. P, Jiao J. J, Li HL. Groundwater response to tidal fluctuation in a two-zone aquifer. *Journal of Hydrology*. 2010; 381(3-4):364–371.
- [14]. Bansal, R. K. and Das, S. K. Analytical solution for transient hydraulic head, flow rate and volumetric exchange in an aquifer under recharge condition, *Journal of Hydrology and Hydromechanics*. 2009; 57(2): 113-120.
- [15]. Singh, S.K. Aquifer response to sinusoidal or arbitrary stage of semipervious stream. *Journal of Hydraulic Engineering*. 2004; 130(11), 1108-1118.
- [16]. Elfeki, A.M., Uffink, G.J., Lebreton, S. Simulation of solute transport under oscillating groundwater flow in homogeneous aquifers. *Journal of Hydraulic research*. 2007. 45(2): 254-260.
- [17]. Chen JW, Hsieh HH, Yeh HF, Lee CH. The effect of the variation of river water levels on the estimation of groundwater recharge in the Hsinhuwei River, Taiwan. *Environ Earth Sci*. 2010. 59:1297.
- [18]. Bansal RK, Das SK. Response of an unconfined sloping aquifer to constant recharge and seepage from the stream of varying water level. *Water Resources Management*. 2011; 25:893–911
- [19]. Dong L, Chen J, Fu C, Jiang H. Analysis of groundwater-level fluctuation in a coastal confined aquifer induced by sea-level variation. *Hydrogeology Journal*. 2012; 20(4):719–726.
- [20]. Rai S, Manglik A. An analytical solution of Boussinesq equation to predict water table fluctuations due to time varying recharge and withdrawal from multiple basins, wells and leakage sites. *Water Resources Management*. 2012; 26:243–252.
- [21]. Huang CS, Lin WS, Yeh HD. Stream filtration induced by pumping in a confined, unconfined or leaky aquifer bounded by two parallel streams or by a stream and an impervious stratum. *Journal of Hydrology*. 2014; 513(26):28–44.
- [22]. Li H, Jiao J.J. Tide-induced groundwater fluctuation in a coastal leaky confined aquifer system extending under the sea. *water resources research*. 2001; 37(5): 1165–1171.
- [23]. Li H, Jiao J. J. Tide-induced seawater–groundwater circulation in a multi-layered coastal leaky aquifer system. *Journal of Hydrology*. 2003; 274(1- 4):211–224.
- [24]. Hussein, M., Schwartz, F.W. Modeling of flow and contaminant transport in coupled stream–aquifer systems. *Journal of Contaminant Hydrology*. 2003; 65: 41–64.
- [25]. Kim, K.Y., Kim, T., Kim, Y., Woo, N.C. A semi-analytical solution for groundwater responses to stream-stage variations and tidal fluctuations in a coastal aquifer. *Hydrological Process*. 2007; 21(5): 665–674.
- [26]. Xu, X., Huang, G., Zhan, H., Qu, Z., Huang, Q. Integration of SWAP and MODFLOW-2000 for modeling groundwater dynamics in shallow water table areas. *Journal of Hydrology*. 2012; 412:170–181.

- [27]. Budge, T.J., Sharp, Jr. J.M. Modeling the usefulness of spatial correlation analysis on karst systems. *Ground Water*. 2009; 47(3):427–37.
- [28]. Palma, H. C., Bentley, L. R. A regional-scale groundwater flowmodel for the Leon–Chinandega aquifer, Nicaragua. *Hydrogeology Journal*. 2007; 15:1457–72.
- [29]. Telogloua L.S, Bansal, R k. Transient solution for stream–unconfined aquifer interaction due to time varying stream head and in the presence of leakage. *Journal of Hydrology*. 2012; 428: 68–79.
- [30]. Saeedpanah I, Golmohamadi Azar R. Solution of Unsteady Flow in a Confined Aquifer Interacting with a Stream with Exponentially Decreasing Stream Stage. *ASCE's Journal of Hydrologic Engineering*. 2019; 24(2): 1–11.
- [31]. Lal, A.M.W. Numerical errors in groundwater and overland flow models. *Water Resour. Res.* 2000; 36 (5): 1237–1247.
- [32]. Hanson, R.T., S.E. Boyce, W. Schmid, J.D. Hughes, S.M. Mehl, S.A. Leake, T. Maddock III, and R.G. Niswonger. One-water Hydrologic Flow Model (MODFLOW-owhm). U.S. Geological Survey, Techniques and Methods. 2014; 6–A51.
- [33]. Xia. Y, Li. H.L, Boufadel. M.C. A new perturbation solution of groundwater table fluctuations in tidal beaches. *J. Hydrodynamics*. 2010, 22(5), 55-60.
- [34]. Harbaugh, A.W. MODFLOW-2005, the U.S. Geological Survey modular ground-water model – the ground-water flow process. U.S. Geological Survey, Techniques and Methods. 2005; 6-A16.

که با توجه به شرایط  $F(0) = F(L) = 0$  داریم  $v = 0$ ، که قابل قبول نیست. حال اگر:

$$K = \mu^2 > 0 \quad \rightarrow \quad F'' - KF = 0$$

$$\rightarrow F(x) = a \cosh \mu x + b \sinh \mu x$$

$$F(0) = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0 \quad \rightarrow \quad F(x) = b \sinh \mu x$$

$$F(L) = 0 \quad \rightarrow \quad b \sinh \mu L = 0$$

چون  $\mu, L$  دو مخالف صفر هستند، بنابراین

$b = F = 0$  می شود که قابل قبول نیست. حال اگر:

(A-3)

$$K = -\mu^2 < 0 \quad \rightarrow \quad F'' + \mu^2 F = 0$$

$$\rightarrow F(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x$$

$$F(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0 \quad \rightarrow \quad F(x) = B \sin \mu x$$

$$F(L) = 0 \quad \rightarrow \quad F(L) = B \sin \mu L = 0$$

برای اینکه  $F \neq 0$  شود، باید  $B \neq 0$  باشد، بنابراین

$\sin \mu L = 0$  باید باشد و داریم:

$$\sin \mu L = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{n\pi}{L} \quad (\text{A-4})$$

### پیوست ارائه حل دقیق

در اینجا محاسبه مقادیر ضریبی در روش تفکیک متغیرها به دست آمد که بعد از معادله ۴، روند حل آن طی شده است.

$$\frac{F''}{F} = \frac{G'}{C_1 G} = K$$

$$F'' - KF = 0 \quad G' - KC_1^2 G = 0 \quad (\text{A-1})$$

$$v(0, t) = F(0).G(t) = 0$$

بدیهی است که  $G(t) \neq 0$  است، زیرا  $G(t) = 0$  به

جواب بدیهی منجر می شود، بنابراین باید  $F(0) = 0$  و  $F(L) = 0$  باشد.

$$F'' - KF = 0 \quad F(0) = 0 \quad , \quad F(L) = 0 \quad (\text{A-2})$$

به ازای مقادیر مختلف  $K$  بررسی می کنیم.

$$K = 0 \quad \rightarrow \quad F'' = 0 \quad \rightarrow \quad F(x) = ax + b$$